Universität Bielefeld
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften

Sequentielle Portefeuille-Entscheidungen mit mehrperiodigem Planungszeitraum

– Ein Finanzmarktmodell mit endogener Preisbildung –

Diplomarbeit
vorgelegt von Marten Hillebrand

August 2003

Themensteller :	PD Dr. Jan Wenzelburger
2. Prüfer :	Prof. Volker Böhm, Ph.D.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

Zu den schwierigsten und gleichzeitig spannendsten Fragestellungen der modernen ökonomischen Theorie gehört es, ein theoretisches Erklärungsmodell für die empirisch beobachteten Phänomene auf Finanzmärkten zu liefern. Dies gilt insbesondere für die Bildung und das dynamische Verhalten von Preisen auf Aktienmärkten, die teilweise starken Schwankungen unterworfen sind, die sich aus theoretischer Sicht bisher nur unzureichend erklären lassen.

Ganz allgemein lässt sich sagen, dass Aktienpreise über den Preismechanismus aus den Anlageentscheidungen der Investoren auf dem Markt resultieren. Diese ergeben sich aus einem individuellen Portefeuilleentscheidungsproblem, bei dem insbesondere zukünftige Kursentwicklungen mit berücksichtigt werden müssen. Da diese in der Regel zum Entscheidungszeitpunkt nicht bekannt sind, erfolgt die Entscheidung unter Unsicherheit und auf der Basis von subjektiven *Erwartungen*. Allgemein lässt sich somit festhalten, dass die beobachteten Preise entscheidend von den Erwartungen der Marktteilnehmer bestimmt werden. Das Phänomen, bei dem tatsächlich beobachtete Größen von den Erwartungen über ihren zukünftigen Verlauf abhängen, wird allgemein als Erwartungsrückkopplung (engl.: *expectations feedback*) bezeichnet und ist eine charakteristische Eigenschaft ökonomischer Systeme (vgl. Böhm & Wenzelburger (1999)). Um also zunächst die *Preisbildung* auf Finanzmärkten zu erklären, müssen zwei Dinge untersucht werden: Erstens, wie die Investoren ihre Portefeuilleentscheidung in Abhängigkeit von ihren subjektiven Erwartungen treffen und, zweitens, wie der Preismechanismus aus den

individuell geäußerten Nachfragen die Preise der Aktien bestimmt.
Um in einem weiteren Schritt die *Dynamik der Preise* zu erklären, muss berücksichtigt werden, wie die Marktteilnehmer ihre Erwartungen in Abhängigkeit von den ihnen zur Verfügung stehenden Informationen bilden und über die Zeit aufdatieren. Die in die Erwartungsbildung eingehenden Beobachtungen können dabei neben vergangenen Kursentwicklungen auch exogene Einflüsse wie gesamtwirtschaftliche Situation, politische Ereignisse, Unternehmensdaten, etc. umfassen. Eine theoretische Beschreibung der Dynamik von Aktienpreisen muss also insbesondere modellieren, welche *Prognoseregeln* die Investoren bei der Bildung ihrer Erwartungen verwenden.
Mit diesen Erkenntnissen erscheint es sinnvoll, bei der Modellierung eines Finanzmarktes in drei Schritte vorzugehen:

1. Betrachtung des individuellen Portefeuilleentscheidungsproblems für gegebene subjektive Erwartungen, dessen Lösung zu einer gewünschten Nachfrage nach Wertpapieren führt.

2. Modellierung des ökonomischen Preisbildungsgesetzes, das in jeder Handelsperiode die Preise und damit auch die nach dem Handel realisierten Portefeuilles endogen aus den individuellen Nachfragen bestimmt.

3. Einbettung der ersten beiden Schritte in ein sequentielles Modell, das insbesondere die Aufdatierung der subjektiven Erwartungen in Form von explizit definierten Prognoseregeln über die Zeit berücksichtigt und somit eine explizite Beschreibung der Entwicklung von Preisen, Portefeuilles und Erwartungen liefert.

Trotz dieser strukturellen Zusammenhänge wird in der Literatur weitgehend darauf verzichtet, alle drei genannten Schritte in die Modellierung eines Finanzmarktes mit einzubeziehen. So wird in den klassischen Arbeiten von Tobin (1958) und

Markowitz (1952) zunächst nur das individuelle Portefeuilleentscheidungsproblem untersucht, ohne die Interaktion der Investoren auf dem Markt zu betrachten.
Im Rahmen des berühmten *Capital Asset Pricing Model* (*CAPM*) (Sharpe (1964), Lintner (1965) und Mossin (1966)) erfolgt die Betrachtung zwar im Rahmen eines geschlossenen Finanzmarktmodells, jedoch ist das Modell statisch angelegt, d.h. es wird nur eine einzige Zeitperiode betrachtet. Somit können keine Aussagen über die zeitliche Entwicklung von Preisen, Portefeuilles, etc. gemacht werden. Weiter beschränkt sich die Betrachtung auf den Fall homogener rationaler Erwartungen aller Investoren.
In Böhm, Deutscher & Wenzelburger (2000) wird erstmals ein sequentielles Finanzmarktmodell präsentiert, das alle drei oben genannten Modellierungsschritte umfasst. Aufbauend darauf werden in den Arbeiten von Böhm & Chiarella (2000), Wenzelburger (2001a), Tonn (2001) und Böhm & Wenzelburger (2002) die Annahmen des CAPM aufgegriffen und im Rahmen eines sequentiellen Modells betrachtet. Weiter wird die Annahme homogener rationaler Erwartungen des klassischen CAPM modifiziert, so dass die subjektiven Erwartungen der Investoren beliebig modelliert werden können. Dabei gestattet es die explizite Formulierung des ökonomischen Preisbildungsgesetzes und der Prognoseregeln der Investoren, die Auswirkungen alternativer (und insbesondere nicht-rationaler und heterogener) Erwartungen auf die Dynamik von Preisen und Portefeuilles zu untersuchen.
In allen genannten Arbeiten wird bei der Betrachtung des individuellen Portefeuilleentscheidungsproblems eine einperiodige Sichtweise unterstellt. Dies impliziert, dass sich das Entscheidungsproblem eines Investors auf die Wahl einer optimalen Portefeuilleentscheidung reduziert, ohne dass zukünftige Anlageentscheidungen bei der Entscheidungsfindung berücksichtigt werden. Eine unmittelbare Erweiterung der obigen Modelle, die in der vorliegenden Diplomarbeit betrachtet werden soll, besteht somit darin, das individuelle Entscheidungsproblem auf einen mehr-

periodigen Planungszeitraum zu erweitern, bei dem auch zukünftige Anlageentscheidungen mit einbezogen werden.

Die allgemeine Form mehrperiodiger Entscheidungsprobleme unter Unsicherheit wird beispielsweise in Grandmont (1982) und Grandmont & Hildenbrandt (1974) betrachtet. Dabei beschränkt sich die Betrachtung jedoch auf einen dreiperiodigen Planungszeitraum. In Pliska (1996) wird speziell das Portefeuilleentscheidungsproblem für einen beliebigen endlichen Planungszeitraum betrachtet, dies jedoch unter der Einschränkung eines diskreten Zustandsraumes.

In der vorliegenden Arbeit werden die Ansätze von Grandmont (1982) und Pliska (1996) aufgegriffen und das Portefeuilleentscheidungsproblem für einen beliebigen endlichen Planungszeitraum untersucht. Die Annahme eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes wird dabei fallengelassen. Die Betrachtung erfolgt sowohl unter allgemeinen als auch den speziellen Annahmen des mehrperiodigen CAPM (Stapleton & Subrahmanyam (1978)). Für beide Fälle werden Bedingungen formuliert, unter denen das Entscheidungsproblem zu einer wohldefinierten Nachfrage nach Wertpapieren führt.

Aufbauend auf den individuellen Nachfragen wird mit dem oben beschriebenen dreistufigen Vorgehen die Preisbildung und -dynamik im Rahmen eines sequentiellen Modells untersucht. Aufgrund der beschriebenen Zusammenhänge ist dazu insbesondere eine Erweiterung der Prognoseregeln auf einen mehrperiodigen Planungszeitraum erforderlich, deren allgemeine Form in Wenzelburger (2001b) und Böhm & Wenzelburger (2000) betrachtet wird. Diese werden wieder sowohl allgemein als auch für den speziellen Fall des mehrperiodigen CAPM untersucht. Speziell wird für das dreiperiodige CAPM die Existenz einer Prognoseregel, die unverzerrte Erwartungen generiert, betrachtet. Die Dynamik von Preisen und Portefeuilles bei homogenen unverzerrten Erwartungen wird sowohl theoretisch als auch mit Hilfe numerischer Simulationen untersucht.

An dieser Stelle möchte ich Herrn PD Dr. Wenzelburger und Herrn Prof. Böhm, Ph.D. für ihre intensive Betreuung herzlich danken. Insbesondere Herr PD Dr. Wenzelburger hat durch unermüdliche Diskussionsbereitschaft und Hilfestellungen großen Anteil am Gelingen dieser Arbeit. Darüber hinaus danke ich allen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit – in welcher Form auch immer – unterstützt haben.

2 Das Allgemeine Mehrperiodige Modell

2.1 OLG-Struktur

Das folgende Kapitel stellt zunächst den allgemeinen Rahmen des Finanzmarktmodells vor, das der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt. Anschließend wird das Portefeuilleentscheidungsproblem eines einzelnen Investors bei mehrperiodigem Planungszeitraum betrachtet. Darauf aufbauend werden die individuellen Nachfragen nach Wertpapieren sowie die allgemeine Form der Preis- und Erwartungsbildung und -dynamik in dem Modell hergeleitet.

Betrachtet wird ein Finanzmarktmodell mit diskreter Zeit und überlappenden Generationen (engl.: *overlapping generations*, OLG) von Investoren, die auf dem Markt agieren. Zu Beginn jeder Periode $t \in \mathbb{N}$ tritt eine neue, junge Generation in den Markt ein, die ihn am Ende der Periode $t+J$ wieder verlässt und somit $J+1$ aufeinander folgende Perioden auf dem Markt handelt. In jeder Periode t besteht die Menge der Investoren somit aus $J+1$ Generationen. Jede Generation wird dabei mit dem Index $j \in \{0, 1, \cdots, J\}$ identifiziert, der ihre *Lebenserwartung*, d.h. die Anzahl der verbleibenden (zukünftigen) Perioden bis zu ihrem Marktaustritt, beschreibt. Speziell charakterisiert $j = J$ die in t junge Generation, die in der betrachteten Periode neu auf dem Markt erscheint, und $j = 0$ die alte Generation, die am Ende der aktuellen Periode den Markt verlässt.

Alle Generationen bestehen strukturell identisch aus $I \geq 1$ Typen von Investoren, die sich bezüglich ihres Investitionsverhalten und ihrer individuellen Charakteristika beliebig unterscheiden können. Ein Investor in einer beliebigen Periode $t \in \mathbb{N}$ wird somit eindeutig durch den Doppelindex (i, j) beschrieben, der

- seinen Typ $i \in \{1, \ldots, I\}$ innerhalb seiner Generation und
- seine Generation $j \in \{0, 1, \ldots, J\}$ und damit seine Lebenserwartung

identifiziert. Mit dieser Indizierung definiert $\mathbb{I} := \{1, \ldots, I\} \times \{1, \ldots, J\}$ die Menge der handelnden Investoren in jeder Periode (ohne die alte Generation $j = 0$). Die Struktur der Marktteilnehmer ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

Generation $j =$	1	2	$\cdots$	j_0	$\cdots$	J
Typ $i =$ 1	$(1,1)$	$(1,2)$	$\cdots$	$(1,j_0)$	$\cdots$	$(1,J)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$\cdots$	$(2,j_0)$	$\cdots$	$(2,J)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
i_0	$(i_0,1)$	$(i_0,2)$	$\cdots$	$\boxed{(i_0,j_0)}$	$\cdots$	(i_0,J)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
I	$(I,1)$	$(I,2)$	$\cdots$	(I,j_0)	$\cdots$	(I,J)

Investoren vom Typ i_0

Investor vom Typ i_0 aus Generation j_0

Generation j_0

Junge Generation

Abbildung 1: Die Investoren einer beliebigen Handelsperiode t.

In der betrachteten Ökonomie existiere ein Konsumgut, das als Numeraire für alle Preise und Zahlungsströme dient. Zu Beginn jeder Periode erhält jeder junge Investor $(i, J) \in \mathbb{I}$ eine exogen gegebene Anfangsausstattung $e^{(i)} > 0$ dieses Gutes.[1] Es wird angenommen, dass die Investoren in den folgenden Perioden ihres Lebens kein weiteres exogenes Einkommen erhalten und dass zwischen den Perioden kein Konsum stattfindet. Weiter wird unterstellt, dass die Konsumenten über keine Technologie verfügen, die es ihnen erlaubt, das Konsumgut selbst zu lagern.

Das Problem eines beliebigen Investors vom Typ i besteht somit darin, sein Anfangsvermögen $e^{(i)}$, das er zu Beginn seines Markteintrittes in Periode $t \in \mathbb{N}$ als junger Investor erhält, in die Periode $t + J$ zu transferieren, an deren Ende er den Markt verlässt. Zu diesem Zweck existieren $K + 1$ Anlagemöglichkeiten in Form von Wertpapieren, die einen intertemporalen Werttransfer ermöglichen und die in jeder Periode gehandelt werden. Somit haben die Investoren die Möglichkeit, in jeder Periode ihr Wertpapier-Portefeuille umzuschichten. Dies führt für jeden Marktteilnehmer auf ein mehrperiodiges Portefeuilleentscheidungsproblem, das in den folgenden Abschnitten betrachtet wird.

[1] Es wird also zugelassen, dass die Anfangsausstattung eines jungen Investors von seinem Typ i abhängig ist, jedoch nicht, dass diese über die Zeit variiert, d.h. jeder junge Investor vom Typ i erhält die gleiche Anfangsausstattung.

2.2 Selbstfinanzierende Handelsstrategien

Im Folgenden wird das Entscheidungsproblem eines einzelnen Investors $(i, j) \in \mathbb{I}$ in einer beliebigen Handelsperiode $t = 0$ betrachtet. Alle Entscheidungsvariablen der folgenden Abschnitte beziehen sich dabei auf den betrachteten Investor, so dass der Übersichtlichkeit halber auf eine Indizierung verzichtet wird.
Gemäß der oben gewählten Notation bezeichnet $j > 0$ den *Planungshorizont* des Investors, d.h. die Periode, an deren Ende er den Markt verlässt, so dass die Menge $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, j\}$ seinen *Planungszeitraum* definiert. Die heutige Periode $t = 0$ wird im Weiteren als *Entscheidungsperiode*, die zukünftigen Perioden $t = 1, \dots, j$ des Planungszeitraumes als *Planungsperioden* bezeichnet. Alle Zeitindizierungen der folgenden Abschnitte beziehen sich auf diesen fixierten Zeitrahmen.

In jeder Periode $t \in \mathbb{T}$ des Planungszeitraumes stehen dem Investor identische Investitionsmöglichkeiten zur Verfügung. Diese bestehen aus den Aktienanteilen von $K+1$ Firmen mit Indexmenge $\mathbb{K} = \{0, 1, \dots, K\}$. Die Aktien werden in jeder Periode t zu Preisen $p_t = (p_t^{(0)}, \dots, p_t^{(K)})^\top \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{K+1}$ gehandelt und liefern je Aktie (vor dem Handel in t) eine Dividendenzahlung $d_t = (d_t^{(0)}, \dots, d_t^{(K)})^\top \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{K+1}$. Dabei soll im Rahmen der folgenden Betrachtung zunächst unterstellt werden, dass die Aktienpreise sämtlich strikt positiv und die Dividendenzahlungen nicht-negativ sind, so dass für den Preisraum $\mathcal{P} = \mathbb{R}_{++}^{K+1}$ und den Dividendenraum $\mathcal{D} = \mathbb{R}_{+}^{K+1}$ gilt. Dividendenertrag und Wiederverkaufserlös der Aktien werden für jedes t in dem cum-dividend Preis $q_t := p_t + d_t$ zusammengefasst.
Im Rahmen einer kompakten Notation werden Preise und Dividendenzahlungen für jede Periode t als *Preis-Dividenden-Signal* $s_t = (p_t^\top, d_t^\top)^\top$ aus dem Signalraum $\mathcal{S} = \mathcal{P} \times \mathcal{D}$ geschrieben. Mit dem Signal s_t sind damit insbesondere die ex- bzw. cum-dividend Preise p_t bzw. q_t der Periode t gegeben.

In der Entscheidungsperiode $t = 0$ besteht Unsicherheit bezüglich zukünftiger Signale $s_1, s_2, \ldots$, die als Zufallsvariablen betrachtet werden.[2] Es wird unterstellt, dass der Investor den Signalprozess $\{s_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ als einen $\mathcal{S}$-wertigen stochastischen Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ betrachtet, der an eine Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ adaptiert ist. Insbesondere bildet er zu Beginn der Entscheidungsperiode Erwartungen bezüglich der entscheidungsrelevanten Signale $s_1, \ldots, s_j$. Weiter wird angenommen, dass der Investor seine Anlageentscheidung in $t = 0$ *vor* der Beobachtung des Signals $s_0 \in \mathcal{S}$ trifft. Die heutigen Preise und Dividendenzahlungen werden daher als Parameter $p \in \mathcal{P}$ und $d \in \mathcal{D}$ im Rahmen der Entscheidungsfindung behandelt.

Für jedes $t \in \mathbb{T}$ bezeichne der Vektor $z_t = (z_t^{(0)}, \ldots, z_t^{(K)})^\top \in Z \subset \mathbb{R}^{K+1}$ das Aktienportefeuille, das der Investor in Periode t erwirbt und zu Beginn der Folgeperiode $t+1$ hält, wobei $z_t^{(k)}$ die Stückzahl der Aktie $k \in \mathbb{K}$ in dem Portefeuille beschreibt. Die Menge Z definiert dabei den Raum der *zulässigen*, d.h. theoretisch realisierbaren, Portefeuilles. Im Rahmen der folgenden Betrachtung sollen negative Bestände in Form von Leerverkäufen zunächst ausgeschlossen werden, so dass $Z = \mathbb{R}_+^{K+1}$ gesetzt wird. Mit $Z_+ := Z \setminus \{0\}$ wird die Menge der zulässigen Portefeuilles, die einen echt positiven Bestand von mindestens einer Aktie enthalten, bezeichnet.

Zu Beginn der betrachteten Periode $t = 0$ besitze der Investor ein Portefeuille $\bar{z}_{-1} \in Z_+$ aus der Vorperiode. Der Ertrag dieses Portefeuilles, bestehend aus Dividendenzahlungen und Wiederverkaufserlös, ist aufgrund der Annahmen an Preise und Dividenden strikt positiv und parametrisch gegeben durch

$$w := \bar{z}_{-1}^\top (p + d) = \bar{z}_{-1}^\top q > 0. \tag{2.1}$$

[2] Zur notationellen Vereinfachung wird im Folgenden der Konvention gefolgt, für Zufallsvariable und ihre Realisation die gleiche Notation zu verwenden.

Der Wert w kann als Vermögen des Investors interpretiert werden, das in $t = 0$ zur Reinvestition zur Verfügung steht. Dies führt auf die folgende Definition:

Definition 1 (Erreichbare Portefeuilleentscheidung)
Für ein gegebenes Portefeuille $\bar{z}_{-1} \in Z_+$ aus der Vorperiode und parametrisch gegebene Preise $p \in \mathcal{P}$ und Dividenden $d \in \mathcal{D}$ heißt eine Portefeuilleentscheidung $z_0 \in Z$ in Periode $t = 0$ erreichbar *oder* finanzierbar*, falls gilt*

$$\bar{z}_{-1}^{\top}(p + d) - z_0^{\top} p \geq 0, \tag{2.2}$$

d.h. falls der Ertrag des Portefeuilles aus der Vorperiode mindestens so groß ist wie der in $t = 0$ reinvestierte Betrag.

Neben einer Portefeuilleentscheidung für die Entscheidungsperiode muss der Investor bei seiner Entscheidungsfindung in $t = 0$ auch die zukünftigen Anlageentscheidungen des Planungszeitraumes berücksichtigen. Dabei wird unterstellt, dass die geplante Portefeuilleentscheidung für eine zukünftige Periode bedingt wird auf die bis dahin beobachtete Realisation von Preisen und Dividenden, über die in der Entscheidungsperiode Unsicherheit besteht. Dies führt auf den folgenden Begriff eines Portefeuilleplans.[3] In der folgenden Definition bezeichnet $\mathcal{S}^t := \prod_{n=1}^{t} \mathcal{S}$ das t-fache kartesische Produkt des Signalraumes $\mathcal{S}$, dessen Elemente im Rahmen einer kompakten Notation als $s_1^t \equiv (s_1^{\top}, \ldots, s_t^{\top})^{\top}$ geschrieben werden.

Definition 2 (Portefeuilleplan) *Ein Portefeuilleplan für eine zukünftige Periode $t \in \{1, \ldots, j-1\}$ ist eine messbare[4] Funktion $z_t : \mathcal{S}^t \longrightarrow Z$, die die geplante Portefeuilleentscheidung $z_t(s_1^t)$ der Periode t in Abhängigkeit von den Signalen $s_1, \ldots, s_t$ festlegt.*

[3] Vgl. Grandmont(1982) zur Definition eines Plans.

[4] Die Eigenschaft der Messbarkeit von Abbildungen zwischen messbaren Räumen bezieht sich im Weiteren stets auf die zugehörigen Borel'schen σ-Algebren.

Es wird unterstellt, dass der Investor in $t = 0$ eine Portefeuilleentscheidung trifft und je einen Portefeuilleplan für die zukünftigen Perioden $t = 1, \ldots, j-1$ des Planungszeitraumes festlegt. Dies führt auf den folgenden Begriff einer Handelsstrategie:

Definition 3 (Handelsstrategie)
Eine Handelsstrategie für $t = 0$ ist eine Liste $H = (z_0, z_1(\cdot), \ldots, z_{j-1}(\cdot))$, die aus einer Portefeuilleentscheidung z_0 für $t = 0$ und je einem Portefeuilleplan $z_t(\cdot)$ für die zukünftigen Perioden $t = 1, \ldots, j-1$ des Planungszeitraumes besteht.[5] *Die Menge der Handelsstrategien in $t = 0$ wird mit $\mathscr{B}_0$ bezeichnet.*

Da der Investor am Ende des Planungshorizontes den Markt verlässt, verkauft er in $t = j$ sein gesamtes Portefeuille, daher umfasst eine Handelsstrategie keinen Portefeuilleplan für die letzte Periode des Planungszeitraumes.
Die Erreichbarkeit einer Handelsstrategie erfordert, dass die geplanten Portefeuilleentscheidungen für jede mögliche Realisation von Preisen und Dividenden finanzierbar sind. Da der Investor kein zusätzliches exogenes Einkommen erhält, muss in jedem Zeitpunkt der Ertrag des alten Portefeuilles aus der Vorperiode ausreichen, um das neue Portefeuille zu finanzieren. Dies führt auf die folgende Definition einer erreichbaren Handelsstrategie:

Definition 4 (Erreichbare/Selbstfinanzierende Handelsstrategie)
Für ein gegebenes Portefeuille $\bar{z}_{-1} \in Z_+$ und parametrische Preise $p \in \mathcal{P}$ und Dividenden $d \in \mathcal{D}$ heißt eine Handelsstrategie $H = (z_0, z_1(\cdot), \ldots, z_{j-1}(\cdot)) \in \mathscr{B}_0$ erreichbar oder finanzierbar*, falls gilt:*

[5] Pliska(1997) definiert eine Handelsstrategie als einen an eine Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ adaptierten stochastischen Prozess. Da ein Portefeuilleplan $z_t(\cdot)$ für Periode t gemäß der obigen Definition als messbare Funktion von höchstens $\mathcal{F}_t$-messbaren Zufallsvariablen selbst $\mathcal{F}_t$-messbar ist, ist diese Definition konsistent mit der obigen.

(1) z_0 *ist eine erreichbare Portefeuilleentscheidung, d.h.* $\bar{z}_{-1}^\top(p+d) - z_0^\top p \geq 0$.

(2) In jedem Zeitpunkt $t = 1, \ldots, j-1$ *gilt für jede Realisation* $s_1^t \in \mathcal{S}^t$ *mit* $s_n = (p_n^\top, d_n^\top)^\top$, $n = 1, \ldots, t$:[6]

$$z_{t-1}(s_1^{t-1})^\top(p_t + d_t) - z_t(s_1^t)^\top p_t \geq 0.$$

Eine Handelsstrategie heißt selbstfinanzierend, *falls in (1) und (2) für jeden Zeitpunkt* $t = 1, \ldots, j-1$ *und jede Realisation* $s_1^t \in \mathcal{S}^t$ *die Gleichheit gilt.*

In dieser Arbeit sollen ausschließlich selbstfinanzierende Handelsstrategien betrachtet werden, daher wird der Begriff *Handelsstrategie* im Weiteren synonym für *selbstfinanzierende Handelsstrategie* verwendet. Die Menge der selbstfinanzierenden Handelsstrategien, die dem Investor in $t = 0$ in Abhängigkeit von dem Portefeuille $\bar{z}_{-1} \in Z_+$ der Vorperiode und den parametrisch gegebenen Preisen $p \in \mathcal{P}$ und Dividenden $d \in \mathcal{D}$ zur Verfügung stehen, wird mit

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(\bar{z}_{-1}, p, d) \quad := \quad & \Big\{ H = (z_0, z_1(\cdot), \ldots, z_{j-1}(\cdot)) \in \mathscr{B}_0 \mid \ \bar{z}_{-1}^\top(p+d) = z_0^\top p, \\ & \qquad z_{t-1}(s_1^{t-1})^\top(p_t + d_t) = z_t(s_1^t)^\top p_t \ \forall s_1^t \in \mathcal{S}^t, t = 1, \ldots, j-1 \Big\}\end{aligned}$$

bezeichnet. Durch die Wahl einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie plant der Investor, in jeder Periode des Planungszeitraumes den gesamten Ertrag des Portefeuilles aus der Vorperiode zu reinvestieren. Dies impliziert, dass kein Einkommensverbrauch in Form von Konsum vor der letzten Periode $t = j$ stattfindet. Weiter sind die Erträge der im Rahmen der Strategie geplanten Portefeuilles aufgrund der Annahmen an Preise und Dividenden und dem Ausschluss von Leerverkäufen für jede mögliche Realisation der unsicheren Signale strikt positiv. Ein Bankrottgehen des Investors im Rahmen einer gewählten selbstfinanzierenden Handelsstrategie ist somit ausgeschlossen.

[6] Im Rahmen eines kleinen Notationsmissbrauchs wird dabei $z_t(s_1^t) \equiv z_0$ für $t = 0$ gesetzt.

2.3 Das mehrperiodige Portefeuilleentscheidungsproblem

Wie oben bereits erwähnt, bildet der Investor zu Beginn der Periode $t = 0$ Erwartungen bezüglich der entscheidungsrelevanten Signale $s_1, \ldots, s_j$. Diese Erwartungen werden in der folgenden Annahme näher charakterisiert. In diesem Zusammenhang wird für einen beliebigen topologischen Raum E mit $\mathcal{B}(E)$ die von den offenen Mengen erzeugte Borel'sche-σ-Algebra auf E bezeichnet.

Annahme 2.1 *Die Erwartungen des Investors in der Entscheidungsperiode $t = 0$ werden beschrieben durch ein subjektives Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf dem Produktraum $\left(\prod_{t=1}^{j} \mathcal{S}, \bigotimes_{t=1}^{j} \mathcal{B}(\mathcal{S})\right)$, das eine subjektive gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $s_1, \ldots, s_j$ definiert.*

Setzt man wieder $\mathcal{S}^j = \prod_{t=1}^{j} \mathcal{S}$, so gilt aufgrund der Eigenschaften der Borel'schen σ-Algebra (vgl. Bauer (1991), S. 151) $\bigotimes_{t=1}^{j} \mathcal{B}(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathcal{S}^j)$, daher wird der Produktraum im Folgenden kürzer als $(\mathcal{S}^j, \mathcal{B}(\mathcal{S}^j))$ geschrieben.
Gegeben die Portefeuilleentscheidung $\bar{z}_{-1} \in Z_+$ aus der Vorperiode und parametrische Preise $p \in \mathcal{P}$ und Dividenden $d \in \mathcal{D}$ definiert $\mathscr{H}(\bar{z}_{-1}, p, d)$ die Menge der selbstfinanzierenden Handelsstrategien, die dem Investor in $t = 0$ zur Verfügung stehen. Jede Wahl einer Strategie $H = (z_0, z_1(\cdot), \ldots, z_{j-1}(\cdot)) \in \mathscr{H}(\bar{z}_{-1}, p, d)$ induziert einen $\mathbb{R}_{++}$-wertigen stochastischen Prozess $\left\{W_t(H, s_1^t)\right\}_{t=1}^{j}$ mit

$$W_t(H, s_1^t) \quad := \quad z_{t-1}(s_1^{t-1})^\top (p_t + d_t), \tag{2.3}$$

der die Entwicklung des Vermögens des Investors beschreibt. Das Vermögen zum Zeitpunkt t entspricht dabei dem Wert des im Rahmen der Strategie gehaltenen Portefeuilles.
Insbesondere definiert jede Handelsstrategie H eine Zufallsvariable $W_j(H, s_1^j)$ mit Werten in dem Messraum $(\mathbb{R}_{++}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_{++}))$, die das im Rahmen der gewählten

Strategie induzierte *Endvermögen* des Investors am Ende des Planungshorizontes beschreibt. Die Verteilung dieser Zufallsvariablen wird durch die subjektive Verteilung ν des Signalprozesses und die gewählte Strategie H bestimmt. Die folgende Annahme beschreibt die Präferenzen des Investors über alternative Endvermögen.

Annahme 2.2 *Die Präferenzen des Investors bzgl. des Endvermögens werden beschrieben durch eine von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion*

$$u : \mathbb{R}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad W \longmapsto u(W), \tag{2.4}$$

die stetig und beschränkt, streng monoton wachsend und streng konkav ist.

Im Folgenden wird unterstellt, dass der Investor in $t = 0$ gegeben seine Erwartungen ν eine Handelsstrategie $H \in \mathscr{H}(\bar{z}_{-1}, p, d)$ wählt, die seinen subjektiven Erwartungsnutzen des Endvermögens maximiert. Das Entscheidungsproblem des Investors in $t = 0$ lässt sich somit formulieren als:

$$\max_H \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathcal{S}^j} u\left(W_j(H, s_1^j)\right) \nu(ds_1^j) \\ u.d.N. \\ H = (z_0, z_1(\cdot), \dots, z_{j-1}(\cdot)) \in \mathscr{H}(\bar{z}_{-1}, p, d). \end{cases} \tag{2.5}$$

Das Entscheidungsproblem (2.5) definiert ein j-stufiges Maximierungsproblem bestehend aus der Wahl einer Portefeuilleentscheidung für $t = 0$ und je eines Plans für $t = 1, \cdots, j-1$. Im Folgenden wird gezeigt, wie dieses Problem mit dem Ansatz der stochastischen dynamischen Programmierung rekursiv gelöst werden kann. Dies ist im vorliegenden Fall aufgrund der zeitlich-rekursiven Struktur des Problems möglich, bei der eine Portefeuilleentscheidung zu einem beliebigen Zeitpunkt nur nachfolgende, nicht aber vorherige Entscheidungen beeinflusst.

2.4 Nachfrage nach Wertpapieren

Der folgende Abschnitt beschreibt die rekursive Lösung des Entscheidungsproblems (2.5). Um die Übersichtlichkeit der Ausführungen zu erhöhen, wird die folgende Hilfsfunktion

$$W : Z \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad W(z,(p,d)) := z^\top (p+d) \tag{2.6}$$

definiert. Gegeben ein beliebiges Portefeuille $z_t \in Z$, das in Periode t erworben wird, liefert $W(z_t, s_{t+1})$ den Wert dieses Portefeuilles in der Folgeperiode in Abhängigkeit von den Preisen p_{t+1} und Dividendenzahlungen d_{t+1}.

Für das weitere Vorgehen ist es erforderlich, aus der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung ν der Signale $s_1, \ldots, s_j$ für jedes $t = 1, \cdots, j$ die Verteilung des Signals s_t bedingt auf vorherige Signale $s_1, \cdots, s_{t-1}$ zu ermitteln. Dazu wird die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung ν faktorisiert und als das Produkt von bedingten Verteilungen und Randverteilung geschrieben. Das folgende Faktorisierungslemma sichert die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Zerlegung.

Lemma 2.1 *Es sei $\mathcal{S} = \mathcal{P} \times \mathcal{D}$ mit $\mathcal{P} = \mathbb{R}_{++}^{K+1}$ und $\mathcal{D} = \mathbb{R}_{+}^{K+1}$. Dann existiert eine Faktorisierung der Verteilung ν der Form $\nu = Q^{(1)} \times Q^{(2)} \times \cdots \times Q^{(j)}$ mit $Q^{(t)} : \left(\prod_{n=1}^{t-1} \mathcal{S}\right) \times \mathcal{B}(\mathcal{S}) \longrightarrow [0,1]$, $t = 2, \ldots, j$, und $Q^{(1)} : \mathcal{B}(\mathcal{S}) \longrightarrow [0,1]$, die für jede messbare Menge $E \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^j)$ definiert ist als*

$$\begin{aligned} \nu(E) &= (Q^{(1)} \times Q^{(2)} \times \cdots \times Q^{(j)})(E) \\ &:= \int_{\mathcal{S}} \cdots \int_{\mathcal{S}} \mathbf{1}_E(s_1, \ldots, s_j) Q^{(j)}(s_1^{j-1}, ds_j) \cdots Q^{(2)}(s_1, ds_2) Q^{(1)}(ds_1). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Die Zerlegung ist ν-fast sicher eindeutig.

Beweis: Siehe Anhang A.1.

Für $t = 2, \cdots, j$ definiert $Q^{(t)}(s_1^{t-1}, B)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$s_t \in B$ gegeben dass vorher Realisationen $s_1^{t-1} = s_1, \ldots, s_{t-1}$ beobachtet wurden. Bezeichnet man den Raum aller geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Signalraum $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ mit $Prob(\mathcal{S})$, so kann man $Q^{(t)}$ als eine Abbildung $Q^{(t)} : \prod_{n=1}^{t-1} \mathcal{S} \longrightarrow Prob(\mathcal{S})$ auffassen, die eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen s_t parametrisiert in vorherigen Signalen $s_1, \ldots, s_{t-1}$ definiert.
Die aus der Faktorisierung (2.7) gewonnene Abbildung $Q^{(1)} : \mathcal{B}(\mathcal{S}) \longrightarrow [0,1]$ definiert in diesem Zusammenhang die konstante Randverteilung des Signals s_1, d.h. für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ liefert $Q^{(1)}(B)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $s_1 \in B$. Für die Lösbarkeit des Entscheidungsproblems sind die folgenden Annahmen bzgl. der Verteilungen $Q^{(t)}(s_1^{t-1}, \cdot)$, $t = 1, \ldots, j$ erforderlich.[7] Dabei bezeichnet für je zwei Portefeuilles $z, z' \in Z$ $A_{z,z'} := \{s \in \mathcal{S} : W(z,s) \neq W(z',s)\}$ die messbare[8] Menge der Preise und Dividenden, für die die Portefeuilles unterschiedliche Erträge liefern.

Annahme 2.3 *Die aus der Faktorisierung (2.7) erhaltenen Übergangskerne* $Q^{(t)}$*,* $t = 1, \ldots, j$*, erfüllen die folgenden Bedingungen:*

(1) Für alle $z, z' \in Z$ *gilt:* $z \neq z' \Rightarrow Q^{(t)}(s_1^{t-1}, A_{z,z'}) > 0$ *für alle* $s_1^{t-1} \in \mathcal{S}^{t-1}$*.*

(2) $Q^{(t)}$ *hat die sog.* Feller-Eigenschaft *(zur Definition dieser Eigenschaft s. Stokey & Lucas (1994), S. 220).*[9]

Während die zweite Annahme rein technischer Natur ist, stellt die erste Annahme eine Erweiterung der Nicht-Redundanz-Bedingung aus Ingersoll (1987) auf einen

[7] Um die folgende Notation zu erleichtern, wird $Q^{(t)}(s_1^{t-1}, \cdot) \equiv Q^{(1)}(\cdot)$ für $t = 1$ gesetzt.

[8] Die Messbarkeit folgt dabei aus der Stetigkeit der Funktion $W(\cdot)$.

[9] Nach Stokey & Lucas (1994), S.386, Lemma 12.14 sichert die Feller Eigenschaft insbesondere, dass Stetigkeit und Beschränktheit von Funktionen bei Integration bzgl. $Q^{(t)}$ erhalten bleiben, d.h. für jede stetige und beschränkte Funktion $F : \mathcal{S}^t \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die Integralfunktion $G(s_1^{t-1}, y) := \int_{\mathcal{S}} F(s_1^t, y) Q^{(t)}(s_1^{t-1}, ds_t)$ ebenfalls stetig und beschränkt. Insbesondere impliziert diese Eigenschaft die von Grandmont (1982), S. 885 geforderte Stetigkeit des Maßes $Q^{(t)}$ bzgl. der Topologie der schwachen Konvergenz (Stokey & Lucas(1994), S. 376).

mehrperiodigen Planungszeitraum dar. Sie besagt, dass die Anlagemöglichkeiten zu jedem Zeitpunkt *nicht-redundant* sein müssen, d.h. zwei verschiedene Portefeuilles können nicht mit Wahrscheinlichkeit eins bzgl. der jeweiligen bedingten Verteilung den gleichen Ertrag liefern.

Um das folgende rekursive Lösungsverfahren zu illustrieren, soll zunächst der Fall $j = 2$ unterstellt werden, d.h. es liegt ein dreiperiodiger Planungszeitraum vor. In diesem Fall definiert (2.5) ein zweistufiges Entscheidungsproblem bestehend aus der Wahl einer Portefeuilleentscheidung z_0 für $t = 0$ und eines Plans $z_1(\cdot)$ für $t = 1$. Die Lösung dieses Problems erfolgt nun in zwei Schritten:
In einem ersten Schritt wird das Entscheidungsproblem für $t = 1$, d.h. in der vorletzten Periode des Planungszeitraumes, betrachtet. Gegeben sei eine parametrische Realisation des Signals $s_1 \in \mathcal{S}$ und eine gegebene Portefeuilleentscheidung $z_0 \in Z_+$ aus der Vorperiode. Deren Ertrag $w_1 := W(z_0, s_1) > 0$ ist damit ebenfalls parametrisch gegeben und definiert das Vermögen des Investors in $t = 1$.
Für festes (w_1, s_1) reduziert sich das Entscheidungsproblem in $t = 1$ auf die Wahl einer erreichbaren Portefeuilleentscheidung $z_1 \in G(p_1, w_1)$, wobei die Menge $G(p_1, w_1) := \{z \in Z : z^\top p_1 = w_1\} \subset Z$ die erreichbaren Portefeuilles in Abhängigkeit von den Preisen $p_1 \in \mathcal{P}$ und dem Vermögen $w_1 > 0$ definiert.[10]
Mit der bedingten Verteilung $Q^{(2)}(s_1, \cdot)$ des Signals s_2 erhält man das Entscheidungsproblem in $t = 1$ bei Planungshorizont $j = 2$ als:

$$\max_z \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathcal{S}} u\left(W(z,s)\right) Q^{(2)}(s_1, ds) \\ \qquad u.d.N. \\ \qquad z \in G(p_1, w_1). \end{cases} \tag{2.8}$$

[10] Mit dem Signal $s_1 = (p_1^\top, d_1^\top)^\top$ sind insbesondere die ex-dividend Preise der Periode $t = 1$ gegeben.

Angenommen das Problem (2.8) habe für jedes $s_1 \in \mathcal{S}$ und jedes $w_1 > 0$ eine Lösung. Dann ist die Wertfunktion

$$V_1(w_1, s_1) \quad := \quad \max_{z \in G(p_1, w_1)} \left\{ \int_{\mathcal{S}} u\left(W(z,s)\right) Q^{(2)}(s_1, ds) \right\} \tag{2.9}$$

wohldefiniert und liefert den in (w_1, s_1) parametrisierten, maximalen Erwartungsnutzen der Periode $t = 1$.

In einem zweiten Schritt wird nun das Entscheidungsproblem in $t = 0$ betrachtet. Gegeben seien parametrische Preise $p \in \mathcal{P}$ und ein Vermögen $w > 0$, das sich mit (2.1) aus dem Portefeuille $\bar{z}_{-1}$ der Vorperiode ergibt. Für die Bestimmung des optimalen Portefeuilles in $t = 0$ wird nun das folgende **Optimalitätsprinzip** ausgenutzt, das in fast allen mehrstufigen Entscheidungsproblemen Verwendung findet (vgl. z.B. Grandmont & Hildenbrandt (1974), Grandmont (1982)):

$$\max_{z \in G(p,w)} \left\{ \int_{\mathcal{S}} V_1\left(W(z,s), s\right) Q^{(1)}(ds) \right\} = \max_{H \in \mathscr{H}(\bar{z}_{-1}, p, d)} \left\{ \int_{\mathcal{S}^2} u\left(W_2(H, s_1^2)\right) \nu(ds_1^2) \right\} \tag{2.10}$$

Dabei definiert $G(p,w) := \{z \in Z : z^\top p = w\} \subset Z$ wieder die Menge der erreichbaren Portefeuilles in $t = 0$ und $Q^{(1)}$ die Randverteilung des Signals s_1.

Die Anwendung des Optimalitätsprinzips (2.10) erlaubt es, in $t = 0$ statt des zweistufigen Entscheidungsproblems (2.5) das folgende, wiederum einstufige Maximierungsproblem bzgl. der Wertfunktion zu betrachten:

$$\max_z \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{\mathcal{S}} V_1\left(W(z,s), s\right) Q^{(1)}(ds) \\ u.d.N. \\ z \in G(p,w). \end{array} \right. \tag{2.11}$$

Mit dem obigen Vorgehen kann somit das *zweistufige* Entscheidungsproblem (2.5) in *zwei einstufige* Problem transformiert werden: In einem ersten Schritt ermittelt man aus dem einstufigen Problem (2.8) die mit (2.9) definierte Wertfunktion und löst in einem zweiten Schritt das Maximierungsproblem (2.11).

Das zunächst für den Fall $j = 2$ beschriebene Vorgehen lässt sich problemlos auf einen beliebigen endlichen Planungshorizont $j > 0$ erweitern. Dabei wird das Entscheidungsproblem (2.5) mit dem beschriebenen rekursiven Verfahren in j einstufige Probleme zerlegt.

Beginnend mit der vorletzten Periode $t = j - 1$ und $V_j(w_j, s_1^j) \equiv u(w_j)$ wird für jedes $t = 1, \cdots, j-1$ das folgende einstufige Entscheidungsproblem betrachtet:

$$\max_z \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathcal{S}} V_{t+1}\left(W(z,s), s_1^t, s\right) Q^{(t+1)}(s_1^t, ds) \\ \qquad\qquad u.d.N. \\ \qquad\qquad z \in G(p_t, w_t). \end{cases} \tag{2.12}$$

Die Signale $s_1^t \in \mathcal{S}^t$ werden dabei ebenso wie das Vermögen $w_t := W(z_{t-1}, s_t) > 0$, das sich aus einem gegebenen Portefeuille $z_{t-1} \in Z_+$ der Vorperiode ergibt, als parametrisch gegeben unterstellt. Der Übergangskern $Q^{(t+1)}(s_1^t, \cdot)$ in (2.12) ergibt sich dabei aus der Faktorisierung (2.7) und liefert für parametrisch gegebene Signale $s_1 \ldots, s_t$ die bedingte Verteilung des Signals s_{t+1}.

Unter der Annahme, dass (2.12) für jedes $t = 1, \ldots, j-1$ eine Lösung besitzt, erhält man eine Folge von Wertfunktionen $V_t(w_t, s_1^t)$, $t = 1, \cdots, j-1$, die sich rekursiv aus der folgenden Beziehung, die in der Literatur auch als **Bellmann-Gleichung** bezeichnet wird (vgl. Pliska (1999)), ergeben:

$$V_t(w_t, s_1^t) = \max_{z \in G(p_t, w_t)} \left\{ \int_{\mathcal{S}} V_{t+1}\left(W(z,s), s_1^t, s\right) Q^{(t+1)}(s_1^t, ds) \right\}. \tag{2.13}$$

Unter Verwendung der Wertfunktion $V_1(w_1, s_1)$, die sich im letzten Rekursionsschritt ergibt, kann die optimale Portefeuilleentscheidung der Periode $t = 0$ analog zum Fall $j = 2$ und (2.11) als Lösung eines einstufigen Problems ermittelt werden. Dabei gilt wieder das **Optimalitätsprinzip**

$$\max_{z \in G(p,w)} \left\{ \int_{\mathcal{S}} V_1\left(W(z,s), s\right) Q^{(1)}(ds) \right\} = \max_{H \in \mathscr{H}(\bar{z}_{-1}, p, d)} \left\{ \int_{\mathcal{S}^j} u\left(W_j(H, s_1^j)\right) \nu(ds_1^j) \right\}. \tag{2.14}$$

Um die optimale Portefeuilleentscheidung der Periode $t = 0$ unter Ausnutzung des Optimalitätsprinzips (2.14) als Lösung eines einstufigen Entscheidungsproblems zu erhalten, muss aus (2.13) die Wertfunktion $V_1(w_1, s_1)$ rekursiv ermittelt werden. Im Rahmen dieses Vorgehens sichert der folgende Satz, dass die Wertfunktionen auf jeder Stufe wohldefinierte Objekte sind, d.h., dass das Entscheidungsproblem (2.12) für jedes $t = 0, \cdots, j-1$ eine Lösung besitzt.

Satz 2.1 *Sei $t \in \{1, \cdots, j-1\}$ beliebig und die Annahmen 2.2 und 2.3 bzgl. Präferenzen und Erwartungen des Investors seien erfüllt. Weiter sei die Wertfunktion $V_{t+1}(w_{t+1}, s_1^{t+1})$ beschränkt und stetig in allen Argumenten und streng monoton und streng konkav in $w_{t+1} > 0$. Dann gilt:*

(1) Das mit (2.12) definierte Entscheidungsproblem besitzt für jedes parametrische $(w_t, s_1^t) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathcal{S}^t$ eine Lösung, die eindeutig bestimmt ist.

(2) Die Lösungsfunktion $z_t^\star(w_t, s_1^t)$ ist stetig in beiden Argumenten.

(3) Die mittels Gleichung (2.13) definierte Wertfunktion $V_t(w_t, s_1^t)$ ist wieder beschränkt und stetig in allen Argumenten und streng konkav und streng monoton in $w_t > 0$.

Beweis:

(1) Für parametrisch gegebenes $w_t > 0$ und $s_t = (p_t^\top, d_t^\top)^\top \in \mathcal{S}$ definiert die Budgetmenge $G(p_t, w_t) = \{z \in Z : z^\top p_t = w_t\} \subset Z$ eine kompakte, nichtleere Menge[11] im Portefeuilleraum Z. Aus der Stetigkeit und Beschränktheit der Wertfunktion $V_{t+1}(\cdot)$, der Stetigkeit der Funktion $W(\cdot)$ und der Feller-Eigenschaft des Übergangskerns $Q^{t+1}(\cdot)$ aus Annahme 2.3(2) folgt, dass die Zielfunktion

$$U_t(z, s_1^t) \;:=\; \int_{\mathcal{S}} V_{t+1}\left(W(z,s), s_1^t, s\right) Q^{(t+1)}(s_1^t, ds) \tag{2.15}$$

[11] Geometrisch entspricht diese Menge einer Hyperebene in Z mit Normalenvektor p_t. Man beachte, dass die Kompaktheit die Annahme strikt positiver Preise aller Wertpapiere erfordert.

beschränkt und stetig in allen Argumenten ist. Dies liefert die *Existenz* einer optimalen Lösung.

Zur *Eindeutigkeit* genügt es aufgrund der Konvexität der Budgetmenge die strikte Konkavität der Zielfunktion in z zu zeigen. Seien dazu $z \neq z' \in Z$ verschiedene Portefeuilles und sei $A_{z,z'}$ wieder die messbare Menge, auf der sich die Erträge unterscheiden, d.h. auf der $W(z,s) \neq W(z',s)$. Aufgrund der Nichtredundanzbedingung muss gelten: $Q^{(t+1)}(s_1^t, A_{z,z'}) > 0$, d.h. diese Menge muss positives Maß haben. Für festes $\lambda \in]0,1[$ bezeichne $z^{(\lambda)} := \lambda z + (1-\lambda)z'$ die Konvexkombination der Portefeuilles. Mit der Linearität der Funktion $W(\cdot)$ folgt

$$W(z^{(\lambda)}, s) = \lambda W(z,s) + (1-\lambda)W(z',s) \qquad \forall s \in \mathcal{S}.$$

Aus der strikten Konkavität der Wertfunktion $V_{t+1}(w_{t+1}, s_1^{t+1})$ in w_{t+1} erhält man für festes $s_1^t \in \mathcal{S}^t$:

$$V_{t+1}(W(z^{(\lambda)}, s), s_1^t, s) \;\; \geq \;\; \lambda V_{t+1}(W(z,s), s_1^t, s) + (1-\lambda)V_{t+1}(W(z',s), s_1^t, s)$$

für alle $s \in \mathcal{S}$ sowie

$$V_{t+1}(W(z^{(\lambda)}, s), s_1^t, s) \;\; > \;\; \lambda V_{t+1}(W(z,s), s_1^t, s) + (1-\lambda)V_{t+1}(W(z',s), s_1^t, s)$$

für $s \in A_{z,z'}$. Für die weitere Beweisführung wird das folgende Lemma benötigt:

Lemma 2.2 *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ messbare, μ-integrierbare Funktionen für die gilt $f \geq g$ für alle $x \in X$ und $\mu(\{f > g\}) > 0$. Dann gilt*

$$\int_X f d\mu > \int_X g d\mu.$$

Beweis: Siehe Anhang A.2.

Im vorliegenden Fall impliziert Lemma 2.2 und die Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned} U_t(z^{(\lambda)}, s_1^t) &= \int_{\mathcal{S}} V_{t+1}(W(z^{(\lambda)}, s), s_1^t, s)\; Q^{(t+1)}(s_1^t, ds) \\ &> \lambda \int_{\mathcal{S}} V_{t+1}(W(z, s), s_1^t, s)\; Q^{(t+1)}(s_1^t, ds) \\ &\quad +(1-\lambda) \int_{\mathcal{S}} V_{t+1}(W(z', s), s_1^t, s)\; Q^{(t+1)}(s_1^t, ds) \\ &= \lambda U_t(z, s_1^t) + (1-\lambda) U_t(z', s_1^t). \end{aligned}$$

Dies liefert die strikte Konkavität der Zielfunktion in z für jedes $s_1^t \in \mathcal{S}^t$ und damit die Eindeutigkeit der Lösung.

(2) Aufgrund der gezeigten Eigenschaften besitzt das Optimierungsproblem (2.12) für jedes $(w_t, s_1^t) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathcal{S}^t$ eine eindeutige Lösung, die als Funktion

$$z_t^\star(w_t, s_1^t) := \arg \max_{z \in G(p_t, w_t)} \left\{ U_t(z, s_1^t) \right\} \tag{2.16}$$

geschrieben werden kann. Um die Stetigkeit dieser Funktion zu zeigen, wird in zwei Schritten vorgegangen.

In einem ersten Schritt zeigt man, dass die Zielfunktion $U_t(z, s_1^t)$ streng monoton in z ist, d.h.[12] $z > z'$ impliziert $U_t(z, s_1^t) > U_t(z', s_1^t)$. Diese Eigenschaft folgt mit Lemma 2.2 aus der strikten Monotonie der Funktion $V_{t+1}(w_{t+1}, s_1^{t+1})$ in w_{t+1} und der Linearität der Funktion $W(z, s)$, die impliziert: $z > z' \Rightarrow W(z, s) > W(z', s)$ $\forall s \in \mathcal{S}$.[13] Aus der strikten Monotonie der Zielfunktion folgt somit, dass die Lösungsfunktion $z_t^\star(w_t, s_1^t)$ unverändert bleibt, wenn die Nebenbedingung des Entscheidungsproblems als Ungleichung $z^\top p_t \leq w_t$ formuliert wird.[14]

[12] Die Notation $z > z'$ meint dass $z^{(k)} \geq z'^{(k)}$ $\forall k \in \mathbb{K}$ und $z \neq z'$.

[13] Dies gilt im vorliegenden Fall, da die cum-dividend Preise strikt positiv sind.

[14] Die $\leq$-Bedingung wird in diesem Fall immer bindend sein.

In einem zweiten Schritt betrachtet man die Korrespondenz $B : \mathcal{P} \times \mathbb{R}_{++} \longrightarrow Z$, $B(p_t, w_t) := \{z \in Z : z^\top p_t \leq w_t\}$, die die Nebenbedingung in Ungleichungsform für alternative Preise und Vermögen definiert. Nach Drèze (1975), S.304, ist B unter den gemachten Annahmen an Preise und Vermögen sowie der Definition des Portefeuilleraumes[15] Z kompaktwertig und stetig (zur Definition der Stetigkeit von kompaktwertigen Korrespondenzen s. Stockey & Lucas (1994), S. 56.). Zusammen mit der oben gezeigten Stetigkeit der Zielfunktion $U(z, s_1^t)$ in allen Argumenten impliziert dies mit dem *Theorem of the Maximum* (Stockey & Lucas (1994), S. 62) und der Eindeutigkeit der Lösung (Stockey & Lucas (1994), S. 57) die Stetigkeit der Funktion $z_t^\star(w_t, s_1^t)$.

(3) Durch Einsetzen der Lösungsfunktion (2.16) in die Zielfunktion (2.15) erhält man die Wertfunktion der Periode t als

$$V_t(w_t, s_1^t) \quad = \quad U_t(z_t^\star(w_t, s_1^t), s_1^t) \tag{2.17}$$

deren Stetigkeit und Beschränktheit unmittelbar aus den Eigenschaften der Zielfunktion und der Stetigkeit der Lösungsfunktion folgt.
Für die strikte Konkavität der Wertfunktion $V_t(w_t, s_1^t)$ in w_t ist zu zeigen, dass für $s_1^t \in \mathcal{S}^t$ fest, $w, w' > 0$, $w \neq w'$, $\lambda \in]0, 1[$ und $w^{(\lambda)} := \lambda w + (1 - \lambda)w'$ gilt

$$V_t(w^{(\lambda)}, s_1^t) > \lambda V_t(w, s_1^t) + (1 - \lambda)V_t(w', s_1^t).$$

Seien dazu

$$\begin{aligned} z_\star &:= z_t^\star(w, s_1^t) \in G(p_t, w) \\ z'_\star &:= z_t^\star(w', s_1^t) \in G(p_t, w') \\ z^{(\lambda)} &:= \lambda z_\star + (1 - \lambda)z'_\star \end{aligned}$$

15 Die Menge Z ist insbesondere nichtleer, abgeschlossen und konvex und erfüllt die Voraussetzungen in Drèze (1975), Annahme 1.

die zu w und w' gehörenden optimalen Lösungen und $z^{(\lambda)}$ deren Konvexkombination. Beachte, dass $z^{(\lambda)} \in G(p_t, w^{(\lambda)})$, jedoch möglicherweise $z^{(\lambda)} \neq z_t^\star(w^{(\lambda)}, s_1^t)$, d.h. $z^{(\lambda)}$ muss nicht optimal bzgl. $w^{(\lambda)}$ sein. Weiter folgt aus $w \neq w'$ aufgrund der Budgetbeschränkung dass $z_\star \neq z'_\star$. Unter Ausnutzung der oben gezeigten strikten Konkavität der Zielfunktion gilt somit:

$$\begin{aligned}
V_t(w^{(\lambda)}, s_1^t) &\geq U_t(z^{(\lambda)}, s_1^t) \\
&= U_t(\lambda z_\star + (1-\lambda) z'_\star, s_1^t) \\
&> \lambda U_t(z_\star, s_1^t) + (1-\lambda) U_t(z'_\star, s_1^t) \\
&= \lambda V_t(w, s_1^t) + (1-\lambda) V_t(w', s_1^t).
\end{aligned}$$

Es bleibt die strikte Monotonie der Funktion $V_t(w, s_1^t)$ in $w > 0$ nachzuweisen, d.h. für festes s_1^t gilt: $w > w' > 0 \Rightarrow V_t(w, s_1^t) > V_t(w', s_1^t)$. Seien dazu analog zu oben $z_\star, z'_\star$ die zu w, w' gehörenden optimalen Lösungen. Setze $\Delta w := w - w' > 0$ und $\Delta z := \left(\frac{\Delta w}{p_t^{(0)}}, 0, \cdots, 0\right)^\top \in Z_+$. Beachte, dass $(z'_\star + \Delta z) \in G(p_t, w)$, jedoch möglicherweise $z_\star \equiv z_t^\star(w, s_1^t) \neq (z'_\star + \Delta z)$. Mit der in Schritt (2) gezeigten strikten Monotonie der Funktion $U_t(z, s_1^t)$ in z folgt somit

$$\begin{aligned}
V_t(w, s_1^t) &= U_t(z_\star, s_1^t) \\
&\geq U_t(z'_\star + \Delta z, s_1^t) \\
&> U_t(z'_\star, s_1^t) \\
&= V_t(w', s_1^t).
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. ■

Man beachte, dass die Voraussetzungen von Satz 2.1 insbesondere für $t = j-1$ und die Wertfunktion $V_j(w_j, s_1^j) = u(w_j)$ erfüllt sind. Induktiv folgt somit, dass die über (2.13) rekursiv definierten Wertfunktionen $V_t(w_t, s_1^t)$ auf jeder Stufe

$t = 1, \cdots, j-1$ wohldefinierte Objekte sind und alle die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllen. Die Lösung des Entscheidungsproblems (2.12) ist somit für jedes $t = 0, 1, \ldots, j$ eindeutig und kann als stetige Funktion der Form (2.16) geschrieben werden.

Unter Ausnutzung des Optimalitätsprinzips (2.14) kann das Portefeuilleentscheidungsproblem der Periode $t = 0$ mit Hilfe der Wertfunktion $V_1(w_1, s_1)$ und der Randverteilung $Q^{(1)}$ des Signals s_1 wie folgt als einstufiges Entscheidungsproblem formuliert werden:

$$\max_{z} \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathcal{S}} V_1\left(W(z,s), s\right) Q^{(1)}(ds) \\ \qquad\qquad u.d.N. \\ \qquad z \in G(p, w). \end{cases} \tag{2.18}$$

Die Preise $p \in \mathcal{P}$ werden dabei ebenso wie das Vermögen $w > 0$, das sich mit Gleichung (2.1) aus dem Portefeuille $\bar{z}_{-1}$ der Vorperiode ergibt, als parametrisch gegeben unterstellt. Da die Wertfunktion $V_1(w_1, s_1)$ die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt, erhält man die optimale Portefeuilleentscheidung der Periode $t = 0$ als stetige Funktion

$$z_0^{\star}(p, w) := \arg \max_{z \in G(p,w)} \left\{ \int_{\mathcal{S}} V_1\left(W(z,s), s\right) Q^{(1)}(ds) \right\}. \tag{2.19}$$

Im Rahmen der bisherigen Betrachtungen wurden die Erwartungen des Investors als gegeben unterstellt. Um sicherzustellen, dass die optimale Portefeuilleentscheidung (2.19) für alternative Erwartungen wohldefiniert ist, muss die Klasse der zulässigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\mathcal{S}^j, \mathcal{B}(\mathcal{S}^j))$ auf solche eingeschränkt werden, die die Annahme 2.3 erfüllen. Bezeichnet man die Menge dieser Verteilungen mit $Prob(\mathcal{S}^j)$, so lässt sich das zentrale Resultat dieses Abschnittes in dem folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 2.2 *Es seien die Annahmen 2.2 und 2.3 bzgl. Erwartungen und Präferenzen erfüllt und der Planungshorizont $j > 0$ sei beliebig, aber fest. Dann existiert eine Funktion*

$$\begin{aligned} \phi^\star : \mathcal{P} \times \mathbb{R}_{++} \times Prob(\mathcal{S}^j) &\longrightarrow Z_+ \\ (p, w, \nu) &\longmapsto \phi^\star(p, w, \nu), \end{aligned} \tag{2.20}$$

die stetig in ihren ersten beiden Argumenten ist und die die Wertpapiernachfrage des Investors in $t = 0$ als Funktion der Preise $p \in \mathcal{P}$, seines mit (2.1) definierten Vermögens $w > 0$ sowie seiner Erwartungen $\nu \in Prob(\mathcal{S}^j)$ definiert.

Bei der mit (2.20) definierten Nachfragefunktion ist zu beachten, dass sich das Vermögen $w > 0$ mit Gleichung (2.1) aus dem Portefeuille $\bar{z}_{-1} \in Z_+$ der Vorperiode sowie den parametrisch gegebenen Preisen $p \in \mathcal{P}$ und Dividendenzahlungen $d \in \mathcal{D}$ der Periode $t = 0$ ergibt. Unter Verwendung von (2.1) kann die Wertpapiernachfrage (2.20) des Investors als Funktion seiner Erwartungen, des Portefeuilles der Vorperiode sowie der Preise und Dividenden in $t = 0$ geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{P} \times \mathcal{D} \times Z_+ \times Prob(\mathcal{S}^j) &\longrightarrow Z_+ \\ \phi\,(p, d, \bar{z}_{-1}, \nu) &:= \phi^\star\,(p, W(\bar{z}_{-1}, (p, d)), \nu)\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Mit Gleichung (2.21) lässt sich weiter die *Nettonachfragefunktion*

$$\begin{aligned} \phi^e : \mathcal{P} \times \mathcal{D} \times Z_+ \times Prob(\mathcal{S}^j) &\longrightarrow \mathbb{R}^{K+1} \\ \phi^e\,(p, d, \bar{z}_{-1}, \nu) &:= \phi\,(p, d, \bar{z}_{-1}, \nu) - \bar{z}_{-1} \end{aligned} \tag{2.22}$$

definieren, die die gewünschte *Umschichtung* des Investors in seinem Portefeuille als Differenz zwischen dem mit (2.21) definierten, neuen Portefeuille und seinem alten Portefeuille aus der Vorperiode beschreibt.

2.5 Preisbildung und -dynamik

Aufbauend auf den Resultaten der vorherigen Abschnitte wird das mehrperiodige Portefeuilleentscheidungsproblem im Folgenden in den sequentiellen Rahmen des Finanzmarktmodells aus Abschnitt 2.1 eingebettet. In diesem Zusammenhang werden zunächst die individuellen Nachfragen aller Investoren nach Wertpapieren in einer beliebigen Periode formuliert. Darauf aufbauend wird die allgemeine Form des ökonomischen Preisbildungsgesetzes, das die Preise in jeder Periode endogen bestimmt, hergeleitet. In einem letzten Schritt wird die Dynamik der Preise, die durch Aufdatierung der subjektiven Erwartungen entsteht, als zufälliges dynamisches System im Sinne von Arnold (1998) formuliert.

Mit der Notation aus Abschnitt 2.1 bezeichne $\mathbb{I}$ wieder die Menge der Investoren auf dem Markt, so dass in jeder Periode $t \in \mathbb{N}$ ein handelnder Investor $(i,j) \in \mathbb{I}$ durch seinen Typenindex $i \in \{1, \cdots, I\}$ und den Generationenindex $j \in \{1, \cdots, J\}$, der seine Lebenserwartung definiert, beschrieben wird.
Dabei weisen je zwei Investoren $(i,j), (i,j') \in \mathbb{I}$ vom gleichen Typ i, die unterschiedlichen Generationen $j \neq j'$ angehören, die *gleichen individuellen Charakteristika* auf. Insbesondere erhalten sie zu Beginn ihres Lebens eine identische Anfangsausstattung $e^{(i)} > 0$ und besitzen die gleiche von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion $u^{(i)}$.
Im Folgenden werden Entscheidungsvariablen wie Portefeuilles und Erwartungen, die sich auf einen einzelnen Investor in einer beliebigen Periode t beziehen, mit dem Index (i,j) indiziert. Dabei soll die Vereinbarung getroffen werden, dass die Indizierung stets auf den Zeitindex der zugehörigen Variable bezogen ist. Mit dieser Konvention bezeichnet beispielsweise $z_t^{(ij)}$ das Portefeuille, das der Investor vom Typ i aus Generation j mit Planungshorizont $t+j$ nach dem Handel in Peri-

ode t hält und entsprechend $z_{t-1}^{(i,j+1)}$ *sein eigenes* Portefeuille aus der Vorperiode. Dagegen bezeichnet $z_{t-1}^{(ij)}$ das Portefeuille, das der Investor vom (gleichen) Typ i mit Planungshorizont $t+j-1$ nach dem Handel in Periode $t-1$ hält.

Es wird unterstellt, dass in einer beliebigen Handelsperiode $t \in \mathbb{N}$ jeder Investor $(i,j) \in \mathbb{I}$ ein j-periodiges Entscheidungsproblem der Form (2.5) löst. Dazu bildet er zu Beginn der Periode Erwartungen in Form einer subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilung $\nu_t^{(ij)} \in Prob(\mathcal{S}^j)$ der unsicheren, entscheidungsrelevanten Signale $s_{t+1}, \cdots, s_{t+j}$. In diesem Zusammenhang bezeichne für $j = 1, \cdots, J$ $Prob(\mathcal{S}^j)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf dem Produktraum $(\mathcal{S}^j, \mathcal{B}(\mathcal{S}^j))$, die die Annahme 2.3 erfüllen. Weiter wird unterstellt, dass die Präferenzen aller Investoren die Eigenschaften aus Annahme 2.2 besitzen. Unter dieser Voraussetzung führt das Entscheidungsproblem (2.5) jedes Investors zu einer wohldefinierten Nachfrage nach Wertpapieren in der Entscheidungsperiode.

Im Folgenden soll zunächst die Form dieser Nachfragen für jeden Investor formuliert werden. Dabei ist zu beachten, dass sich das Vermögen eines jungen Investors $(i,J) \in \mathbb{I}$ mit den Annahmen aus Abschnitt 2.1 aus der exogen gegebenen Anfangsausstattung $e^{(i)} > 0$ ergibt. Der Betrag, der ihm zur Investition zur Verfügung steht, ist damit insbesondere unabhängig von den Preisen und Dividenden der betrachteten Periode. Mit Satz 2.2 gilt, dass für jeden jungen Investor $(i,J) \in \mathbb{I}$ eine Abbildung

$$\begin{aligned} \phi^{(iJ)} : \mathcal{P} \times Prob(\mathcal{S}^J) &\longrightarrow Z_+ \\ (p, \nu^{(iJ)}) &\longmapsto \phi^{(ij)}\left(p, \nu^{(iJ)}\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

existiert, die stetig in p ist und die seine Nachfrage nach Wertpapieren in Abhängigkeit von seinen Erwartungen sowie den parametrisch gegebenen Preise bestimmt.[16]

[16] Analog zu der Konvention in Böhm & Chiarella (2000) wurde die Anfangsausstattung $e^{(i)}$ dabei nicht als Argument der Nachfragefunktion (2.23) aufgeführt, da sie exogen gegeben und für jeden jungen Investor vom Typ i identisch ist.

Da die Investoren nur zu Beginn ihres Lebens eine Anfangsausstattung erhalten, wird das Vermögen eines nicht-jungen Investors $(i,j) \in \mathbb{I}$, $j < J$, analog zu den Ausführungen der vorherigen Abschnitte durch den Ertrag seines Portefeuilles $z_{t-1}^{(i,j+1)}$ aus der Vorperiode bestimmt. Insbesondere hängt der Betrag, der ihm zur Investition zur Verfügung steht, damit von den Preisen und Dividendenzahlungen der betrachteten Periode ab. Mit Satz 2.2 und Gleichung (2.21) ergibt sich die Nachfrage eines nicht-jungen Investors $(i,j) \in \mathbb{I}$, $j < J$, als Funktion seiner Erwartungen, seiner Portefeuilleentscheidung aus der Vorperiode sowie der parametrisch gegebenen Preise und Dividenden als Abbildung

$$\begin{aligned} \phi^{(ij)} : \mathcal{P} \times \mathcal{D} \times Z_+ \times Prob(\mathcal{S}^j) &\longrightarrow Z_+ \\ (p, d, z_{-1}^{(i,j+1)}, \nu^{(ij)}) &\longmapsto \phi^{(ij)}(p, d, z_{-1}^{(i,j+1)}, \nu^{(ij)}). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Analog zu den Annahmen in Böhm & Chiarella (2000) und Wenzelburger (2001a) soll im Folgenden angenommen werden, dass auf dem betrachteten Finanzmarkt ein *risikoloses Wertpapier* existiert. Dazu werden die Preise und Dividendenzahlungen des Wertpapiers $k = 0$ als konstant unterstellt, so dass $p_t^{(0)} \equiv p^{(0)} \equiv 1$, $d_t^{(0)} \equiv r$, $\forall t \in \mathbb{N}$. Der cum-dividend Preis dieser Anlage ist somit in jeder Periode gegeben durch $R := 1 + r > 0$, wobei r als Verzinsung pro investierter Einheit interpretiert werden kann. Um konsistent mit der in Abschnitt 2.3 formulierten Erwartungsbildung zu bleiben, ist die folgende Annahme erforderlich:

Annahme 2.4 *Die Investoren unterstellen in ihren Erwartungen für die Preise und Dividenden des Wertpapiers* $k = 0$ *eine Dirac-Verteilung in dem Punkt* $(1, r)$, *so dass mit Wahrscheinlichkeit eins gilt:*

$$s_t^{(0)} = (p_t^{(0)}, d_t^{(0)})^\top \equiv (1, r)^\top, \qquad t \in \mathbb{N}.$$

Um die Unterscheidung zwischen den riskanten Wertpapieren $k = 1, \ldots, K$ und der risikolosen Anlageform $k = 0$ zu verdeutlichen, wird der Portefeuilleraum Z

im Weiteren als Produkt $Z = Y \times X$ geschrieben. Hierbei bezeichne $Y = \mathbb{R}_+$ die Menge der zulässigen risikolosen Investitionen und $X = \mathbb{R}_+^K$ die zulässigen Aktienportefeuilles.[17]

Zur Vereinfachung der weiteren Notation werden nun die folgenden Änderungen vorgenommen: Bisher bezeichneten die Vektoren $p_t = (p_t^{(0)}, \cdots, p_t^{(K)})^\top$ und $d_t = (d_t^{(0)}, \cdots, d_t^{(K)})^\top$ die Preise und Dividenden *aller* $K+1$ Wertpapiere. In allen folgenden Abschnitten dieser Arbeit bezeichnen nun $p_t = (p_t^{(1)}, \cdots, p_t^{(K)})^\top$ und $d_t = (d_t^{(1)}, \cdots, d_t^{(K)})^\top$ die Preise und Dividendenzahlung der *riskanten* Wertpapiere.

Um die Preisbildung in dem Modell zu untersuchen, genügt es, die Nachfrage der Investoren auf den Märkten $k = 1, \cdots, K$, d.h. nach riskanten Wertpapieren, zu betrachten. Definiert man die folgende Projektionsabbildung $\pi_X : Y \times X \longrightarrow X$, $\pi_X(y, x) := x$, so erhält man aus (2.23) die Aktiennachfrage eines jungen Investors $(i, J) \in \mathbb{I}$ als Funktion der parametrisch gegebenen Preise sowie seiner Erwartungen als:

$$\begin{aligned} \varphi^{(iJ)} : \mathbb{R}_{++}^K \times Prob(\mathcal{S}^J) &\longrightarrow X \\ \varphi^{(iJ)}\left(p, \nu^{(iJ)}\right) &:= \pi_X\left(\phi^{(iJ)}\left((1,p), \nu^{(iJ)}\right)\right). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Analog erhält man aus (2.24) die Aktiennachfrage eines nicht-jungen Investors $(i, j) \in \mathbb{I}$, $j < J$, als Funktion seiner Erwartungen, seiner vorherigen Portefeuilleentscheidung sowie der parametrisch gegebenen Preise und Dividenden als

$$\begin{aligned} \varphi^{(ij)} : \mathbb{R}_{++}^K \times \mathbb{R}_+^K \times Prob(\mathcal{S}^j) \times Z_+ &\longrightarrow X \\ \varphi^{(ij)}\left(p, d, \nu^{(ij)}, z_{-1}^{(i,j+1)}\right) &:= \pi_X\left(\phi^{(ij)}\left((1,p),(r,d), \nu^{(ij)}, z_{-1}^{(i,j+1)}\right)\right). \end{aligned} \tag{2.26}$$

[17] Im Weiteren werden nur noch die riskanten Wertpapiere $k = 1, \ldots, K$ als Aktien bezeichnet.

Im Rahmen einer kompakten Notation werden im Weiteren für jedes t

$$\nu_t := \left(\nu_t^{(ij)}\right)_{(i,j)\in\mathbb{I}} \quad \text{und} \quad \zeta_{t-1} := \left(z_{t-1}^{(ij)}\right)_{(i,j)\in\mathbb{I}}$$

als Listen der subjektiven Erwartungen aller Marktteilnehmer sowie der Portefeuilles der nicht-jungen Investoren aus der Vorperiode gesetzt. Gegeben eine Realisation $d_t \in \mathbb{R}_+^K$ des Dividendenprozesses erhält man die aggregierte Nachfrage nach Aktien in Periode t als:

$$\Phi(p, d_t, \nu_t, \zeta_{t-1}) := \underbrace{\sum_{i=1}^{I} \varphi^{(iJ)}\left(p, \nu_t^{(iJ)}\right)}_{\text{Nachfrage d. jungen Investoren}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{i=1}^{I} \varphi^{(ij)}\left(p, d_t, \nu_t^{(ij)}, z_{t-1}^{(i,j+1)}\right)}_{\text{Nachfrage d. nicht-jungen Investoren}}. \quad (2.27)$$

Um den markträumenden Preis $p_t \in \mathbb{R}_{++}^K$ zu bestimmen, wird der Gesamtbestand $\bar{x} = (\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(K)}) \in \mathbb{R}_{++}^K$ an Aktien in der Ökonomie über die Zeit konstant gesetzt. Weiter wird analog zu Wenzelburger (2001a) unterstellt, dass in jeder Periode $t \in \mathbb{N}$ eine weitere Händlergruppe sogenannter *Noise-Traders* am Markt eine (preisunabhängige) Nachfrage $\xi_t = (\xi_t^{(1)}, \cdots, \xi_t^{(K)})^\top \in \mathbb{R}^K$ nach Aktien entfaltet, deren Realisation außerhalb des Modellrahmens bestimmt wird.[18] Gegeben die aggregierte Nachfrage (2.27) und die Transaktion ξ_t der Noise-Traders ergibt sich für den markträumenden Preis p_t die Bedingung

$$\Phi(p_t, d_t, \nu_t, \zeta_{t-1}) - (\bar{x} - \xi_t) \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.28)$$

Die Markträumungsbedingung (2.28) fordert, dass die Summe der individuellen Aktiennachfragen der Investoren einschließlich der Noise-Traders gleich dem Aktienbestand sein muss.[19] Unterstellt man analog zu Böhm & Chiarella (2000), dass

[18] Die Transaktion ξ_t kann als Nachfrage interpretiert werden, der kein entsprechendes mikroökonomisches Entscheidungskalkül zugrunde liegt, vgl. Wenzelburger (2001a), S.5.

[19] Alternativ kann die Summe der Nettonachfragen der Investoren nach Aktien einschließlich der alten Generation $j = 0$ und der Noise-Traders gleich Null gesetzt werden. Da zu Beginn der Periode t alle Aktien unter den Investoren verteilt sind, d.h. $\sum_{(i,j)\in\mathbb{I}} x_{t-1}^{(ij)} + \xi_{t-1} = \bar{x}$, ergibt sich auch bei diesem Vorgehen die Markträumungsbedingung (2.28).

die aggregierte Nachfragefunktion (2.27) global invertierbar in p ist, so erhält man aus (2.28) das Preisbildungsgesetz explizit als

$$\begin{aligned} S : \prod_{j=1}^{J} (Prob(\mathcal{S}^j))^I \times Z_+^{IJ} \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}^K &\longrightarrow \mathbb{R}_{++}^K \\ p_t = S(\nu_t, \zeta_{t-1}, d_t, \xi_t) &:= \Phi^{-1}(\bar{x} - \xi_t, d_t, \nu_t, \zeta_{t-1}). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Die Abbildung (2.29) definiert ein ökonomisches Gesetz im Sinne von Böhm & Wenzelburger (1999), das in jeder Periode t den markträumenden Preisvektor p_t in Abhängigkeit von der Portefeuilleallokation ζ_{t-1} aus der Vorperiode, den Erwartungen ν_t aller Investoren, der Dividendenzahlung d_t (die vor dem Handel in t erfolgt) sowie der Nachfrage ξ_t der Noise-Traders bestimmt. Die funktionale Form der Abbildung S wird dabei sowohl von den individuellen Charakteristika der Investoren (Präferenzen, Erwartungen, Anfangsausstattungen) als auch von den Marktgegebenheiten (Aktienbestand, risikolose Verzinsung, Anzahl und Lebensdauer der Investoren) bestimmt.

Die Abhängigkeit der Preisbildung von der Dividendenzahlung d_t und der Portefeuilleallokation ζ_{t-1} der Vorperiode ergibt sich dabei ausschließlich über die Vermögenssituation der nicht-jungen Investoren. Dies ist eine Konsequenz der mehrperiodigen OLG-Struktur, bei der sich das Vermögen eines nicht-jungen Investors aus dem Ertrag seines Portefeuilles aus der Vorperiode ergibt.

Die nach dem Handel realisierten Portefeuilles der Marktteilnehmer (einschließlich der risikolosen Investition) erhält man aus (2.23) und (2.24) als:[20]

$$\begin{aligned} z_t^{(ij)} &= \phi^{(ij)}(p_t, d_t, z_{t-1}^{(i,j+1)}, \nu_t^{(ij)}), \quad j = 1, \cdots, J-1 \\ z_t^{(iJ)} &= \phi^{(iJ)}(p_t, \nu_t^{(iJ)}). \end{aligned} \tag{2.30}$$

[20] Im Rahmen eines kleinen notationellen Missbrauchs wurden dabei die fixierten Argumente $p_t^{(0)} = 1$ und $d_t^{(0)} = r$ vernachlässigt.

Um im Folgenden die Entwicklungen von Preisen, Portefeuilles und Erwartungen zu untersuchen, werden mit der folgenden Annahme die Dividendenzahlungen sowie die Transaktionen der Noise-Traders in jeder Periode t beschrieben:

Annahme 2.5 *Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *und die Filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{N}}$. *Dann gilt:*

(1) Die Dividendenzahlungen werden beschrieben durch einen adaptierten ergodischen Prozess $\{d_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *mit Werten in* $\mathbb{R}_+^K$*, so dass die Abbildung* $d_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+^K$ $\mathcal{F}_t$*-messbar ist.*

(2) Die Transaktionen der Noise-Traders werden beschrieben durch einen adaptierten ergodischen Prozess $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *mit Werten in* $\mathbb{R}^K$*, so dass die Abbildung* $\xi_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^K$ $\mathcal{F}_t$*-messbar ist.*

Um eine vollständige Beschreibung der Entwicklung der Preise über die Zeit, d.h. des Preisprozesses, zu erhalten, muss im Folgenden festgelegt werden, wie die Investoren ihre Erwartungen in jeder Periode in Abhängigkeit von den zur Verfügung stehenden Informationen bilden und über die Zeit aufdatieren.
Um die Erwartungsbildung der verschiedenen Generationen zu beschreiben, betrachtet man zunächst die in einer beliebigen Periode t junge Generation. Zu Beginn der Periode (vor dem Handel und der Dividendenzahlung) bildet ein junger Investor $(i, J) \in \mathbb{I}$ annahmegemäss Erwartungen in Form einer subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilung $\nu_t^{(iJ)} \in Prob(\mathcal{S}^J)$ der Signale $s_{t+1}, \cdots, s_{t+J}$. Seine Informationsmenge zum Zeitpunkt der Erwartungsbildung besteht dabei aus den Beobachtungen von Preisen p_τ und Dividenden d_τ sowie Transaktionen ξ_τ der Noise-Traders[21] bis zum Ende der Periode $t-1$, d.h. $\tau < t$. Weiter wird unter-

[21] Es wird also unterstellt, dass die Portefeuilles der Noise-Traders idealerweise beobachtbare Größen sind. Diese recht restriktive Annahme wird in Wenzelburger (2001a) insofern gerechtfertigt, als dort gezeigt wird, dass eine nicht direkt beobachtbare Transaktion durch geeignete Schätzungen approximiert werden kann.

stellt, dass der Investor die Erwartungen $\nu_{t-1}^{(iJ)} \in Prob(\mathcal{S}^J)$ seines Vorgängers, d.h. des in der Vorperiode $t-1$ jungen Investors vom gleichen Typ i, kennt.
Zu Beginn der Periode t hat der Investor im Vergleich zu seinem Vorgänger eine weitere Realisation p_{t-1}, d_{t-1} und ξ_{t-1} beobachtet. Die allgemeine Form einer Prognoseregel kann somit als Abbildung (vgl. Böhm & Chiarella (2000))

$$\begin{aligned} \Psi^{(iJ)} : Prob(\mathcal{S}^J) \times \mathbb{R}^K_{++} \times \mathbb{R}^K_{+} \times \mathbb{R}^K &\longrightarrow Prob(\mathcal{S}^J) \\ \Psi^{(iJ)}(\nu_{t-1}^{(iJ)}, p_{t-1}, d_{t-1}, \xi_{t-1}) &= \nu_t^{(iJ)}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

definiert werden. Diese legt fest, wie ein junger Investor $(i, J) \in \mathbb{I}$ in Periode t die Erwartungen $\nu_{t-1}^{(iJ)}$ seines Vorgängers in Abhängigkeit von den zusätzlich beobachteten Realisationen p_{t-1}, d_{t-1} und ξ_{t-1} zu $\nu_t^{(iJ)}$ aufdatiert. Die Abbildung $\Psi^{(iJ)}$ in (2.31) definiert dabei einen sogenannten Markoff'schen Übergangskern, der die Erwartungen rekursiv für jeden Zeitpunkt aus den zur Verfügung stehenden Informationen bestimmt.

Um eine analoge Prognoseregel für die nicht-jungen Generationen zu formulieren, wird im Folgenden unterstellt, dass alle Investoren vom Typ i die *gleichen Prognoseverfahren* verwenden.[22] Dies impliziert, dass ein nicht-junger Investor $(i, j) \in \mathbb{I}$, $j < J$, in Periode t mit Planungshorizont $t + j$ eine identische Verteilung der Signale $s_{t+1}, \cdots, s_{t+j}$ unterstellt wie der junge Investor (i, J) vom gleichen Typ i. Dieser Zusammenhang wird in der folgenden Annahme formalisiert. Dazu bezeichne für $j = 1, \ldots, J$ die Abbildung $\pi_{1,j} : \mathcal{S}^J \longrightarrow \mathcal{S}^j$, $\pi_{1,j}(s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_J) := (s_1, \ldots, s_j)$ die Projektion des Produktraumes S^J auf seine ersten j Komponenten.

[22] Mit Bezug auf Wenzelburger (2001a) kann dies beispielsweise damit begründet werden, dass alle Investoren vom Typ i die gleichen Finanzintermediäre zur Prognosebildung heranziehen.

Annahme 2.6 *In jeder Periode $t \in \mathbb{N}$ ergibt sich die Verteilung $\nu_t^{(ij)} \in Prob(\mathcal{S}^j)$ eines nicht-jungen Investors $(i,j) \in \mathbb{I}$, $j < J$, aus der Verteilung $\nu_t^{(iJ)} \in Prob(\mathcal{S}^J)$ des jungen Investors vom gleichen Typ i als Bildverteilung unter der Projektionsabbildung $\pi_{1,j}$, d.h. für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^j)$ gilt:*

$$\nu_t^{(ij)}(B) \quad = \quad \nu_t^{(iJ)}(\pi_{1,j}^{-1}(B)). \tag{2.32}$$

Mit Annahme (2.6) folgt, dass die Erwartungen der Investoren in jeder Periode vollständig durch die Erwartungen der jeweils jungen Generation beschrieben werden. Für die Prognoseregel eines nicht-jungen Investors $(i,j) \in \mathbb{I}$ kann wegen (2.32)

$$\Psi^{(ij)} := \pi_{1,j} \circ \Psi^{(iJ)}, \quad j = 1, \cdots, J-1. \tag{2.33}$$

gesetzt werden.

Definiert man $\Psi = (\Psi^{(ij)})_{(i,j)\in\mathbb{I}}$ und $\phi(\cdot) := (\phi^{(ij)}(\cdot))_{(i,j)\in\mathbb{I}}$ als Listen der verwendeten Prognoseregeln sowie der individuellen Nachfragfunktionen aus (2.21), so erhält man die folgende Einschrittabbildung eines sogenannten *zufälligen dynamischen Systems* im Sinne von Arnold (1998), das die Dynamik der Erwartungen, Preise und Portefeuilles beschreibt.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \nu_t & = & \Psi(\nu_{t-1}, p_{t-1}, d_{t-1}, \xi_{t-1}) \\ p_t & = & S(\Psi(\nu_{t-1}, p_{t-1}, d_{t-1}, \xi_{t-1}), \zeta_{t-1}, d_t, \xi_t) \\ \zeta_t & = & \phi(p_t, d_t, \nu_t, \zeta_{t-1}). \end{array} \right. \tag{2.34}$$

Das dynamische System (2.34) liefert eine explizite Beschreibung der Entwicklung von Preisen, Erwartungen und Portefeuilles unter dem exogenen stochastischen Einfluss des Dividendenprozesses $\{d_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ und des Transaktionsprozesses $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$

der Noise-Traders. Die Dynamik wird dabei im Wesentlichen von dem Zusammenspiel zwischen den individuell verwendeten Prognoseregeln Ψ, dem Preisbildungsgesetz S und den individuellen Nachfragen ϕ bestimmt. Diese Interaktion wird abschließend in der folgende Abbildung illustriert, die den sequentiellen Ablauf des Modells in einer beliebigen Handelsperiode beschreibt.

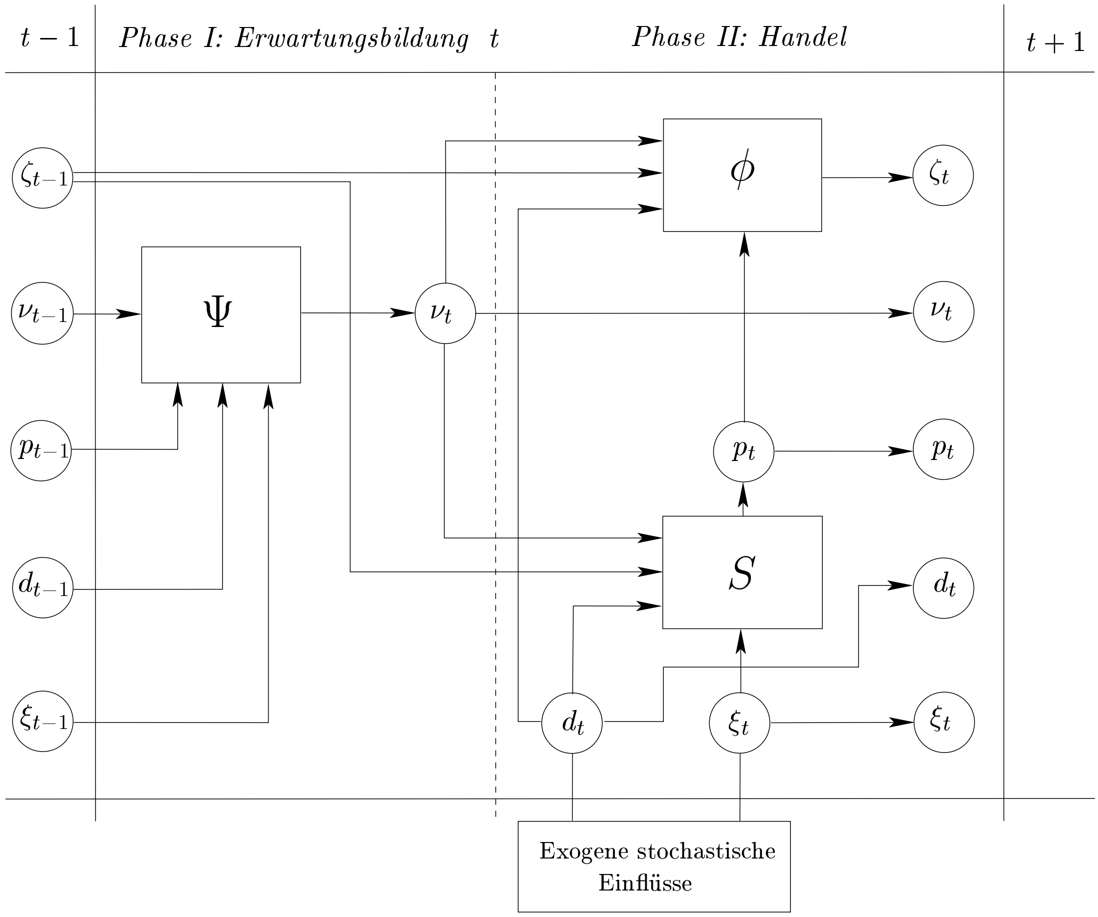

Abbildung 2: Sequentieller Ablauf in einer beliebigen Periode t.

2.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das mehrperiodige Portefeuilleentscheidungsproblem unter allgemeinen Annahmen bzgl. Erwartungen und Präferenzen betrachtet. Es wurde gezeigt, dass das Entscheidungsproblem unter der Annahme strikt konvexer Präferenzen und nichtredundanter Anlagemöglichkeiten zu einer wohldefinierten, stetigen Nachfragefunktion nach Wertpapieren führt. Aufbauend auf den individuellen Nachfragen wurde das ökonomische Preisbildungsgesetz hergeleitet und die allgemeine Form der Preis- und Erwartungsdynamik als zufälliges dynamisches System im Sinne von Arnold (1998) formuliert.

3 Mehrperiodige Portefeuilleentscheidungen im CAPM

3.1 Annahmen des CAPM

Im Folgenden soll das mehrperiodige Portefeuilleentscheidungsproblem unter den Annahmen des *Capital Asset Pricing Model*(CAPM) betrachtet werden. Dieses Modell geht zurück auf die Arbeiten von Sharpe (1964), Lintner (1965) und Mossin (1966) und bildet heute die Grundlage der klassischen Finanzmarkttheorie. Da im CAPM sowohl negative Preise als auch Leerverkäufe und Kreditaufnahmen in unbegrenzter Höhe zugelassen sind (vgl. Stapleton & Subrahmanyam (1978)), ist eine Modifikation der Annahmen des vorherigen Kapitels erforderlich. So wird im Folgenden $Z = Y \times X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K$ als Raum der zulässigen Portefeuilles und $\mathcal{P} = \{1\} \times \mathbb{R}^K$ als Preisraum (einschließlich der risikolosen Anlageform) gesetzt. Alle Definitionen des Abschnitts 2.2 bzgl. Handelsstrategien, etc. sind im Weiteren innerhalb dieses modifizierten Rahmens zu betrachten. Als weitere Modifikation wird im Folgenden der Spezialfall $d_t = 0\ \forall t \in \mathbb{N}$ betrachtet, d.h. es finden keine Dividendenzahlungen statt. Die subjektive Erwartungsbildung der Investoren reduziert sich somit auf die unsicheren ex-dividend Preise des Planungszeitraumes.

3.2 Portefeuilleentscheidungen im CAPM

Betrachtet wird wieder das Portefeuilleentscheidungsproblem eines einzelnen Investors $(i, j) \in \mathbb{I}$ in einer beliebigen Periode $t = 0$ mit Planungshorizont $j > 0$. Alle Zeitindizierungen dieses Kapitels beziehen sich wieder auf diesen fixierten Zeitrahmen.

In jeder Periode $t = 0, 1, \ldots, j-1$ stehen dem Investor die im vorherigen Kapitel beschriebenen Investitionsmöglichkeiten in K riskante und eine risikolose Anlageform zur Verfügung. Es bezeichne $z_t = (y_t, x_t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K$ wieder die Portefeuilleentscheidung der Periode t bestehend aus der Investition y_t in die sichere Anlage und dem riskanten Aktienportefeuille $x_t = \left(x_t^{(1)}, \cdots, x_t^{(K)}\right)^\top$.

Im Rahmen des Entscheidungsproblems werden die Preise der riskanten Wertpapiere in $t = 0$ wieder als Parameter $p \in \mathbb{R}^K$ betrachtet. Der Investor besitze zu Beginn der Entscheidungsperiode ein Portefeuille $\bar{z}_{-1} = (\bar{y}_{-1}, \bar{x}_{-1}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K$ aus der Vorperiode, dessen Ertrag

$$w := R\bar{y}_{-1} + p^\top \bar{x}_{-1} \tag{3.1}$$

sein ebenfalls parametrisch gegebenes Vermögen in $t = 0$ definiert, das zur Investition zur Verfügung steht.[23] Dabei bezeichne $R > 0$ wieder den Ertrag pro investierter Einheit in die risikolose Anlageform.

Da annahmegemäß keine Dividendenzahlungen stattfinden, reduziert sich die Unsicherheit in der Entscheidungsperiode auf die zukünftigen ex-dividend Preise der riskanten Wertpapiere. Der Investor bildet zu Beginn der Entscheidungsperiode $t = 0$ Erwartungen in Form einer subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilung $\nu \in Prob(\mathbb{R}^{Kj})$ der entscheidungsrelevanten Preise $p_1, \ldots, p_j$.

[23] Mit der OLG-Struktur des Modells ist dies gleichbedeutend mit der Annahme $j < J$, d.h. der Investor gehört in $t = 0$ nicht der jungen Generation an. Der Fall $j = J$, bei dem sich das Vermögen als Anfangsausstattung $e^{(i)} > 0$ ergibt, erfordert nur geringfügige Modifikationen.

Gegeben das Portefeuille $\bar{z}_{-1}$ und parametrische Preise p besteht das Entscheidungsproblem des Investors in $t = 0$ in der Wahl einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie H (vgl. Abschnitt 2.2) bestehend aus

1. Einer Portefeuilleentscheidung $(y_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K$ für $t = 0$

2. Einer Liste von Portefeuilleplänen $(y_t(\cdot), x_t(\cdot))$, $t = 1, \ldots, j-1$, die für jede Periode t des Planungszeitraumes die geplante Portefeuilleentscheidung als Funktion der Preise $p_1, \ldots, p_t$ beschreiben.

Es bezeichne $\mathscr{H}(p, \bar{z}_{-1})$ wieder die Menge der selbstfinanzierenden Handelsstrategien, die dem Investor in $t = 0$ in Abhängigkeit von dem Portefeuille $\bar{z}_{-1}$ und den Preisen p in $t = 0$ zur Verfügung stehen. Für jedes $H \in \mathscr{H}(p, \bar{z}_{-1})$ definiert die Zufallsvariable

$$W_j(H, p_1^j) := R y_{j-1}(p_1^{j-1}) + p_j^\top x_{j-1}(p_1^{j-1}) \tag{3.2}$$

das im Rahmen der gewählten Strategie erzielte *Endvermögen*. Unterstellt man wieder, dass der Investor gegeben seine Präferenzen u aus Annahme 2.2 sowie seine Erwartungen $\nu \in \mathit{Prob}(\mathbb{R}^{Kj})$ den Erwartungsnutzen des Endvermögens maximiert, so lautet das Entscheidungsproblem in $t = 0$:

$$\max_H \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{Kj}} u\left(W_j(H, p_1^j)\right) \nu(dp_1^j) \\ \qquad u.d.N. \\ H \in \mathscr{H}(\bar{z}_{-1}, p). \end{cases} \tag{3.3}$$

In den folgenden Abschnitten wird das Entscheidungsproblem (3.10) unter speziellen Annahmen bzgl. der subjektiven Verteilung ν und der Nutzenfunktion u betrachtet. Insbesondere werden dabei die Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung eine wichtige Rolle spielen. Die folgenden Ausführungen stellen daher zunächst einige wichtige Eigenschaften normalverteilter Zufallsvariablen zusammen. In diesem Zusammenhang bezeichne für $n \geq 1$ $\mathcal{M}_n \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ die Menge aller symmetrischen, positiv definiten $n \times n$-Matrizen.

Definition 5 *Eine Zufallsvariable* $X = (X_1, \ldots, X_n)$*,* $n \geq 1$*, mit Werten in* $\mathbb{R}^n$ *heißt (nichtsingulär) normalverteilt mit Parametern* $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_n$*, falls sie die folgende Gauss'sche Dichtefunktion besitzt:*[24]

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_n &\longrightarrow \mathbb{R}_{++} \\ f_n(x; \mu, \Sigma) &:= c_n(\Sigma)\ \exp\Big\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\Big\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei $c_n(\Sigma) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[\det \Sigma\right]^{-\frac{1}{2}} > 0.$

Zwischen der Zufallsvariablen X und den Parametern (μ, Σ) der Verteilung besteht dabei der folgende Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X\right] &:= \int_{\mathbb{R}^n} x f(x; \mu, \Sigma)\, dx = \mu \\ \mathbb{V}\left[X\right] &:= \mathbb{E}\left[(X-\mu)(X-\mu)^\top\right] = \Sigma. \end{aligned}$$

Die Verteilung einer normalverteilten Zufallsvariable wird daher vollständig durch ihre ersten beiden Momente beschrieben.

Im Folgenden wird für $n \geq 1$ die Funktion $g_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathbb{R}_{++}$

$$g_n(x; c, \mu, \Sigma) := c \exp\Big\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\Big\} \tag{3.5}$$

als *Gauss'sche Funktion* in x mit Parametern (c, μ, Σ) bezeichnet. Es gilt somit der Zusammenhang

$$f_n(x; \mu, \Sigma) = g_n(x; c_n(\Sigma), \mu, \Sigma), \tag{3.6}$$

[24] Die Eigenschaft der Nichtsingularität der Verteilung ist dabei gleichbedeutend mit der hier getroffenen Annahme einer positiv definiten Matrix Σ, siehe Tong (1990), Definition 3.2.1.

d.h. eine Gauss'sche Dichtefunktion ist eine spezielle Gauss'sche Funktion, deren Integral über $\mathbb{R}^K$ auf eins normiert ist (siehe Anderson (1984)).
Im Rahmen der folgenden Ausführungen werden zumeist Gauss'sche Funktionen bzw. Dichten, die auf $\mathbb{R}^K$ definiert sind, betrachtet. Um die Übersichtlichkeit der Notation zu erhöhen, wird für diesen Fall der Dimensionsindex n weggelassen, d.h. es wird $g(\cdot) \equiv g_K(\cdot)$, $c(\cdot) \equiv c_K(\cdot)$ und $f(\cdot) \equiv f_K(\cdot)$ gesetzt. Als weitere Konvention wird der Parameter c einer Gauss'schen Funktion für den Fall $c = 1$ als Argument vernachlässigt, d.h. es wird $g(x; \mu, \Sigma) \equiv g(x; 1, \mu, \Sigma)$ gesetzt.

Das folgende Lemma beschreibt einige wichtige Eigenschaften Gauss'scher Funktionen, die im Verlauf der weiteren Betrachtungen benötigt werden. Dabei wird für eine invertierbare Matrix A die Notation $A^{-\top} := (A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$ verwendet.

Lemma 3.1 *Gegeben die Definition aus Gleichung (3.5) gilt:*

(1) Das Produkt von $m \geq 2$ Gauss'schen Funktionen $g(x; c^{(i)}, \vartheta^{(i)}, \Omega^{(i)})$ in $x \in \mathbb{R}^K$ mit Parametern $(c^{(i)}, \vartheta^{(i)}, \Omega^{(i)}) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^K \times \mathcal{M}_K$, $i = 1, \ldots, m$ ist wieder eine Gauss'sche Funktion, d.h. es gilt

$$\prod_{i=1}^{m} g(x; c^{(i)}, \vartheta^{(i)}, \Omega^{(i)}) \quad = \quad g(x; c, \vartheta, \Omega). \tag{3.7}$$

Die Parameter $(c, \vartheta, \Omega) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^K \times \mathcal{M}_K$ ergeben sich dabei als

$$\begin{aligned}
\Omega &:= \left[\Omega^{(1)-1} + \ldots + \Omega^{(m)-1}\right]^{-1} \\
\vartheta &:= \Omega\left[\Omega^{(1)-1}\vartheta^{(1)} + \ldots + \Omega^{(m)-1}\vartheta^{(m)}\right] \\
c &:= \frac{\prod_{i=1}^{m} g(0; c^{(i)}, \vartheta^{(i)}, \Omega^{(i)})}{g(0; \vartheta, \Omega)}.
\end{aligned}$$

(2) Für das Integral einer Gauss'schen Funktion $g(x; c, \vartheta, \Omega)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^K} g(x; c, \vartheta, \Omega)\, dx = \frac{c}{c(\Omega)} > 0.$$

(3) Für beliebiges $\kappa \in \mathbb{R}^K$ und invertierbares $A \in \mathbb{R}^{K\times K}$ gelten die folgenden Eigenschaften $(E1)-(E3)$ Gauss'scher Funktionen:

$$
\begin{aligned}
(E1) \quad g(x;c,\vartheta+\kappa,\Omega) &= g(x-\kappa;c,\vartheta,\Omega) \\
(E2) \quad g(x;c,\vartheta,\Omega) &= g(-x;c,-\vartheta,\Omega) \\
(E3) \quad g(Ax;c,\vartheta,\Omega) &= g(x;c,A^{-1}\vartheta,A^{-1}\Omega A^{-\top})
\end{aligned}
$$

Beweis: Siehe Anhang A.3.

Aufbauend auf diesen Vorüberlegungen wird die folgende Annahme bezüglich der subjektiven Erwartungen des Investors gemacht:

Annahme 3.1 *Der Investor unterstellt bzgl. der Verteilung $\nu \in Prob(\mathbb{R}^{Kj})$ der Zufallsvariablen $p_1,\dots,p_j$ eine nichtsinguläre Normalverteilung auf $\mathbb{R}^{Kj}$ mit Momenten $\mu \in \mathbb{R}^{Kj}$ und $\Sigma \in \mathcal{M}_{Kj}$. Für jedes $E \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{Kj}\right)$ gilt somit:*

$$\nu(E) = \int_E f_{Kj}(p\,;\mu,\Sigma)\,dp, \quad p \in \mathbb{R}^{Kj}. \tag{3.8}$$

Aus den oben beschriebenen Eigenschaften der Normalverteilung folgt, dass die Erwartungen des Investors in $t=0$ vollständig durch die Momente der Verteilung beschrieben werden, die sich in Blockmatrixschreibweise ergeben als:

$$\mu := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{Kj}, \qquad \Sigma := \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \cdots & \Sigma_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{j1} & \cdots & \Sigma_{jj} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{Kj}. \tag{3.9}$$

Dabei definiert der Vektor

$$\mu_t = \mathbb{E}\left[p_t\right] \in \mathbb{R}^K, \quad t = 1,\dots,j,$$

den subjektiven Erwartungswert des Investors bzgl. der Zufallsvariablen p_t und die Matrix

$$\Sigma_{ts} = \mathbb{E}\left[(p_t - \mu_t)(p_s - \mu_s)^\top\right] \in \mathbb{R}^{K\times K}, \quad t, s = 1, \ldots, j,$$

die subjektive Varianz-Kovarianz-Einschätzung des Investors zwischen den Zufallsvariablen p_t und p_s. Insbesondere beschreibt Σ_{tt} die Varianz-Kovarianz-Matrix der Preise p_t und Σ_{ts}, $t \neq s$, die Kovarianz-Matrix der Preise p_t und p_s. Für den Spezialfall $\Sigma_{ts} = 0$, $t \neq s$, werden die Preise der Perioden t und s als unkorreliert unterstellt.[25]

Abschließend wird die folgende Annahme bezüglich der Präferenzen des Investors gemacht:

Annahme 3.2 *Die Präferenzen des Investors bzgl. des Endvermögens werden beschrieben durch die exponentielle von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion*

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (W; a) \longmapsto u(W; a) := -\exp\Big\{-aW\Big\}.$$

Hierbei definiert der Parameter $a > 0$ die Risikoaversion des Investors.

Unter Verwendung der Beziehung (3.8) und der Nutzenfunktion aus Annahme 3.2 kann das Entscheidungsproblem (3.3) in $t = 0$ wie folgt geschrieben werden:

$$\max_H \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{Kj}} u\left(W_j(H, p_1^j); a\right) f_{Kj}(p_1^j; \mu, \Sigma)\; dp_1^j \\ \qquad\qquad u.d.N. \\ \qquad\qquad H \in \mathscr{H}(\bar{z}_{-1}, p). \end{cases} \tag{3.10}$$

Im Folgenden wird die Lösung des mehrperiodigen Entscheidungsproblems (3.10) unter den Annahmen 3.1 und 3.2 mit Hilfe des in Abschnitt 2.4 vorgestellten rekursiven Ansatzes der stochastischen dynamischen Programmierung betrachtet.

[25] Nach Tong(1990), S.31, Theorem 3.3.2 folgt unter der Normalverteilungsannahme sogar die stärkere Eigenschaft der stochastischen Unabhängigkeit der Zufallsvariablen p_t und p_s.

3.3 Das zweiperiodige Entscheidungsproblem

Im Rahmen der Lösung des Entscheidungsproblems (3.10) wird zunächst der Fall $j = 2$ betrachtet, d.h. es liegt ein dreiperiodiger Planungszeitraum vor. In diesem Fall reduziert sich die Erwartungsbildung des Investors in $t = 0$ auf die unsicheren Preise (p_1, p_2) der folgenden beiden Perioden.
Bezüglich der subjektiven Verteilung $\nu \in Prob(\mathbb{R}^{2K})$ wird annahmegemäß eine Normalverteilung unterstellt, die vollständig beschrieben wird durch die zugehörigen Momente

$$\mu := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \mathbb{E}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma := \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \mathbb{V}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Gegeben die Momente $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^{2K} \times \mathcal{M}_{2K}$ wird durch (3.10) ein zweistufiges Entscheidungsproblem definiert, das mit dem im vorherigen Kapitel vorgestellten Ansatz der dynamischen Programmierung gelöst werden kann.[26] Dazu wird das *zweistufige Problem* (3.10) mit dem in Abschnitt 2.4 beschriebenen Vorgehen in *zwei einstufige* Probleme zerlegt. Die Lösung des Entscheidungsproblems erfolgt somit wieder in zwei Schritten:

1. Betrachtung des (einstufigen) Entscheidungsproblems für $t = 1$, Ermittlung der zugehörigen Wertfunktion.

2. Lösung des Entscheidungsproblems für $t = 0$ unter Verwendung der Wertfunktion aus Schritt 1.

Im Rahmen dieses zweistufigen Vorgehens ist es analog zu Abschnitt 2.4 wieder erforderlich, die gemeinsame Verteilung ν der Zufallsvariablen (p_1, p_2) zu faktorisieren und in bedingte Verteilung und Randverteilung zu zerlegen. Dazu werden

[26] Für die im Folgenden betrachtete Lösung des Entscheidungsproblems werden die Momente (μ, Σ) aus (3.11) als gegebene, fixe Größen unterstellt.

die folgenden Parameter definiert, die sich aus den Verteilungsmomenten (3.11) ergeben und damit im Rahmen des Entscheidungsproblems ebenfalls fixe Größen sind:

$$\begin{aligned} B_2 &:= \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} \in \mathbb{R}^{K\times K} \\ \beta_2 &:= \mu_2 - B_2\mu_1 \in \mathbb{R}^K \\ \Sigma_2 &:= \Sigma_{22} - B_2\Sigma_{12} \in \mathcal{M}_K. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Unter Verwendung dieser Definitionen beschreibt das folgende Lemma die Faktorisierung der Verteilung ν.

Lemma 3.2 *Es seien die Zufallsvariablen* (p_1, p_2) *gemeinsam normalverteilt mit den Momenten* $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^{2K} \times \mathcal{M}_{2K}$ *aus (3.11). Dann gilt:*

(1) Die gemeinsame Verteilung $\nu \in Prob(\mathbb{R}^{2K})$ *lässt sich zerlegen in eine bedingte Verteilung* $Q^{(2)} : \mathbb{R}^K \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^K) \longrightarrow [0,1]$ *der Zufallsvariablen* p_2 *und eine Randverteilung* $Q^{(1)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^K) \longrightarrow [0,1]$ *der Zufallsvariablen* p_1*. Für jedes* $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2K})$ *gilt die Zerlegung*

$$\nu(E) = \int_{\mathbb{R}^K}\int_{\mathbb{R}^K} \mathbf{1}_E(p_1, p_2) Q^{(2)}(p_1, dp_2) Q^{(1)}(dp_1) \tag{3.13}$$

(2) Die bedingte Verteilung $Q^{(2)}$ *der Zufallsvariablen* p_2 *ist gegeben durch eine Normalverteilung auf* $\mathbb{R}^K$ *mit bedingten Momenten* $(\mu_{2|1}, \Sigma_2)$ *wobei*

$$\mu_{2|1} := \beta_2 + B_2 p_1. \tag{3.14}$$

Die Parameter $\beta_2 \in \mathbb{R}^K$*,* $B_2 \in \mathbb{R}^{K\times K}$ *und* $\Sigma_2 \in \mathcal{M}_K$ *ergeben sich dabei mit (3.12) aus den Momenten* (μ, Σ) *der gemeinsamen Verteilung.*

(3) Die Randverteilung $Q^{(1)}$ *der Zufallsvariablen* p_1 *ist gegeben durch eine Normalverteilung auf* $\mathbb{R}^K$ *mit Momenten* (μ_1, Σ_{11})*, die sich aus (3.11) ergeben.*

Beweis: Siehe Anhang A.4.

Für jedes $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^K)$ und jede Realisation $p_1 \in \mathbb{R}^K$ liefert die bedingte Verteilung

$$Q^{(2)}(p_1, E) \quad = \quad \int_E f(p; \beta_2 + B_2 p_1, \Sigma_2)\; dp \tag{3.15}$$

die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $p_2 \in E$, gegeben dass vorher die Realisation p_1 beobachtet wurde. Man erkennt aus (3.14), dass der bedingte Erwartungswert $\mu_{2|1}$ eine lineare Funktion in p_1 ist, die bedingte Varianz-Kovarianzmatrix Σ_2 dagegen ausschließlich von der Varianz-Kovarianz-Matrix Σ der gemeinsamen Verteilung bestimmt wird. Somit kann $Q^{(2)}$ als Abbildung $Q^{(2)} : \mathbb{R}^K \longrightarrow Prob(\mathbb{R}^K)$ aufgefasst werde, die eine Normalverteilung der Zufallsvariablen p_2 mit einem in p_1 parametrisiertem Erwartungswert $\mu_{2|1}$ definiert.
Die sich aus der Faktorisierung (3.13) ergebende Randverteilung

$$Q^{(1)}(E) \quad = \quad \int_E f(p; \mu_1, \Sigma_{11})\; dp \tag{3.16}$$

definiert für jedes $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^K)$ die Wahrscheinlichkeit, dass $p_1 \in E$ unabhängig von der Realisation von p_2.
Aus dem folgenden Lemma ergibt sich, dass unter den gemachten Annahmen sowohl die bedingte Verteilung (3.15) als auch die Randverteilung (3.16) nichtsingulär sind, d.h. die Matrizen Σ_2 aus (3.12) und Σ_{11} sind beide positiv definit und symmetrisch.

Lemma 3.3 *Es sei $A \in \mathcal{M}_n$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, die partitioniert werde als $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ wobei die Blockmatrizen A_{11} und A_{22} beide quadratisch seien. Dann sind die Matrizen A_{11}, A_{22} und $A_2 := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ alle ebenfalls symmetrisch und positiv definit.*

Beweis: Siehe Oulette (1981), S.208, Korollar 3.1.

Schritt 1: Entscheidungsproblem für $t = 1$

Aufbauend auf diesen Vorüberlegungen wird in einem ersten Schritt zunächst das Entscheidungsproblem für $t = 1$ betrachtet (vgl. Abschnitt 2.4). Gegeben sei eine parametrische Realisation der Preise p_1 und eine Portefeuilleentscheidung (y_0, x_0) aus der Vorperiode, deren Ertrag $w_1 := Ry_0 + x_0^\top p_1$ das (ebenfalls parametrisch gegebene) Vermögen des Investors in $t = 1$ bestimmt.
Die Erwartungen bzgl. der Zufallsvariablen p_2 werden für parametrisches p_1 durch die mit Gleichung (3.15) definierte, bedingte Verteilung $Q^{(2)}(p_1, \cdot)$ mit zugehöriger Dichtefunktion $f(\,\cdot\,; \beta_2 + B_2 p_1, \Sigma_2)$ beschrieben. Die Parameter $(\beta_2, B_2, \Sigma_2) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K \times K} \times \mathcal{M}_K$ ergeben sich dabei mit Gleichung (3.12) aus den Momenten (μ, Σ) der gemeinsamen Verteilung.
Gegeben parametrische Preise $p_1 \in \mathbb{R}^K$ und ein Vermögen $w_1 \in \mathbb{R}$ reduziert sich das Entscheidungsproblem in $t = 1$ auf die Wahl eines erreichbaren Portefeuilles (x_1, y_1), das den Erwartungsnutzen des Endvermögens maximiert. Das Entscheidungsproblem in $t = 1$ lautet somit:

$$\max_{x,y} \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^K} u(Ry + x^\top p; a)\; f(p; \beta_2 + B_2 p_1, \Sigma_2)\; dp \\ u.d.N \\ y + x^\top p_1 = w_1. \end{cases} \tag{3.17}$$

Aus (3.17) ergibt sich die Zielfunktion

$$U_1(x, y; p_1) := \int_{\mathbb{R}^K} u(Ry + x^\top p; a)\; f(p; \beta_2 + B_2 p_1, \Sigma_2)\; dp, \tag{3.18}$$

die den Erwartungsnutzen des Endvermögens als Funktion der Portefeuilleentscheidung in $t = 1$ sowie der parametrisch gegebenen Preise p_1 definiert und daher im Weiteren als *Erwartungsnutzenfunktion* der Periode $t = 1$ bezeichnet wird. Das folgende Lemma liefert eine wichtige Vereinfachung für Integralfunktionen der Form (3.17):

Lemma 3.4 *Seien* $(\theta, \Theta) \in \mathbb{R}^K \times \mathcal{M}_K$, $c > 0$ *und* $\alpha > 0$ *gegeben. Dann gilt für die Funktionen* $u(\cdot;\alpha)$ *und* $g(\cdot; c, \theta, \Theta)$ *die folgende Transformationsbeziehung:*

$$\int_{\mathbb{R}^K} u(Ry + x^\top p; \alpha) g(p; c, \theta, \Theta)\, dp \quad = \quad \frac{c}{c(\Theta)}\, u\left(Ry + x^\top \theta - \frac{\alpha}{2} x^\top \Theta\, x; \alpha\right) \tag{3.19}$$

Beweis: Der Integralkern $u(Ry+x^\top p;\alpha)\; g(p; c, \theta, \Theta)$ ist das Produkt zweier Exponentialfunktionen $u(\cdot;\alpha)$ und $g(\cdot; c, \theta, \Theta)$, deren Exponenten als Summe geschrieben werden können. Man erhält somit:

$$u(Ry + x^\top p; \alpha)\; g(p; c, \theta, \Theta) = -c \exp\left\{-\alpha(Ry + x^\top p) - \frac{1}{2}(p-\theta)^\top \Theta^{-1}\,(p-\theta)\right\}.$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie der Matrix $\Theta^{-1} = \Theta^{-\top}$ kann der Exponent wie folgt umgeschrieben werden:[27]

$$\begin{aligned}
&-\alpha\left(Ry + x^\top p\right) - \tfrac{1}{2}(p-\theta)^\top \Theta^{-1}\,(p-\theta)\\
&= -\alpha Ry - \tfrac{1}{2}\Big[(p-(\theta-\alpha\Theta x))^\top \Theta^{-1}(p-(\theta-\alpha\Theta x)) + 2\alpha x^\top\theta - \alpha^2 x^\top \Theta x\Big]\\
&= -\alpha(Ry + x^\top\theta - \tfrac{\alpha}{2}x^\top\Theta x) - \tfrac{1}{2}\Big[(p-(\theta-\alpha\Theta x))^\top \Theta^{-1}(p-(\theta-\alpha\Theta x))\Big].
\end{aligned}$$

Für den Integralkern in (3.19) gilt somit die folgende Zerlegung:

$$u(Ry + x^\top p; \alpha) g(p; c, \theta, \Theta) = u\Big(Ry + x^\top\theta - \frac{\alpha}{2} x^\top \Theta x; \alpha\Big)\; g(p; c, \theta - \alpha\Theta x, \Theta). \tag{3.20}$$

Da der erste Faktor unabhängig von der Integrationsvariablen p ist, folgt die Behauptung durch Einsetzen von (3.20) in (3.19) und mit Lemma 3.1 (2). ■

In allen Optimierungsproblemen, die in diesem und den folgenden Abschnitten betrachtet werden, wird die Zielfunktion stets in eine Form gebracht, die eine

[27] Für die folgenden Umformungen wurden die die Zusammenhänge $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ für quadratische Matrizen A, B und $(AB)^\top = B^\top A^\top$ für beliebige Matrizen A, B ausgenutzt.

Anwendung von Lemma 3.4 erlaubt. Im vorliegenden Fall erhält man die Erwartungsnutzenfunktion $U_1(x, y; p_1)$ aus (3.17) mit (3.6) durch Anwendung von Lemma 3.4 (setze dazu $\theta = \beta_2 + B_2 p_1$, $\Theta = \Sigma_2$, $c = c(\Sigma_2)$ und $\alpha = a$) als

$$U_1(x, y; p_1) \quad = \quad u\left(Ry + x^\top(\beta_2 + B_2 p_1) - \frac{a}{2} x^\top \Sigma_2 x; a\right). \tag{3.21}$$

Das Entscheidungsproblem (3.17) lautet somit:

$$\max_{y,x} \begin{cases} u\left(Ry + x^\top(\beta_2 + B_2 p_1) - \frac{a}{2} x^\top \Sigma_2 x; a\right) \\ \qquad\qquad u.d.N. \\ \qquad y + x^\top p_1 = w_1. \end{cases} \tag{3.22}$$

Das folgende Lemma beschreibt allgemein die Lösung von Entscheidungsproblemen der Form (3.22) sowie eine Eigenschaft des Maximums, die im weiteren Verlauf benötigt wird.

Lemma 3.5 *Seien $(\theta, \Theta) \in \mathbb{R}^K \times \mathcal{M}_K$, $c > 0$, $\alpha > 0$ sowie Preise $p \in \mathbb{R}^K$ und Vermögen $w \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt:*

(1) Das Entscheidungsproblem

$$\max_{x,y} \begin{cases} c\, u\left(Ry + x^\top \theta - \frac{\alpha}{2} x^\top \Theta\, x; \alpha\right) \\ \qquad\qquad u.d.N. \\ \qquad y + x^\top p = w \end{cases} \tag{3.23}$$

besitzt eine eindeutige Lösung $(x^\star, y^\star) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}$ der Form:

$$\begin{aligned} x^\star &= \frac{1}{\alpha} \Theta^{-1}(\theta - Rp) \\ y^\star &= w - p^\top x^\star. \end{aligned} \tag{3.24}$$

(2) Das Maximum

$$u^\star \;:=\; c\, u\left(Ry^\star + x^{\star\top}\theta - \frac{\alpha}{2} x^{\star\top}\Theta\, x^\star; \alpha\right)$$

des Entscheidungsproblems (3.23) lässt sich schreiben als

$$u^\star \;=\; u(w;\alpha R)\; g(Rp; c, \theta, \Theta). \tag{3.25}$$

Beweis:

(1) Für festes $c > 0$ und $\alpha > 0$ ist die Maximierung der Funktion

$$c\, u\left(Ry + x^\top\theta - \frac{\alpha}{2} x^\top\Theta\, x; \alpha\right) = -c \exp\left\{-\alpha\left(Ry + x^\top\theta - \frac{\alpha}{2} x^\top\Theta\, x\right)\right\}.$$

aufgrund der strikten Monotonie der Funktion $cu(\cdot;\alpha)$ äquivalent zur Maximierung der Funktion $(x, y) \longmapsto Ry + x^\top\theta - \frac{\alpha}{2} x^\top\Theta\, x$. Aus der zugehörigen Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) := Ry + x^\top\theta - \frac{\alpha}{2} x^\top\Theta\, x + \lambda(w - x^\top p - y)$$

erhält man über die Bedingungen erster Ordnung

$$\theta - \alpha\Theta x - \lambda p \overset{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad R - \lambda \overset{!}{=} 0.$$

und mit der Nebenbedingung $y + x^\top p = w$ die Lösung (3.24).

(2) Durch Einsetzen der Lösungen in die Zielfunktion ergibt sich unter Ausnutzung der Symmetrie der Matrix Θ das Maximum $u^\star$ als:

$$\begin{aligned} u^\star &= c\, u\left(Ry^\star + x^{\star\top}\theta - \frac{\alpha}{2} x^{\star\top}\Theta\, x^\star; \alpha\right) \\ &= c\, u\left(Rw + x^{\star\top}(\theta - Rp) - \frac{\alpha}{2} x^{\star\top}\Theta\, x^\star; \alpha\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c\,u\left(Rw + \frac{1}{2\alpha}(\theta - Rp)^\top \Theta^{-1}(\theta - Rp); \alpha\right) \\
&= c\,u\left(Rw + \frac{1}{2\alpha}(Rp - \theta)^\top \Theta^{-1}(Rp - \theta); \alpha\right) \\
&= u(w; \alpha R)\, g(Rp; c, \theta, \Theta)
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung (2) folgt. ■

Im vorliegenden Fall erhält man die Lösung des Entscheidungsproblems (3.17) mit Lemma 3.5(1) (setze dazu $c = 1$, $\theta = \beta_2 + B_2 p_1$, $\Theta = \Sigma_2$, $\alpha = a$ sowie $p = p_1$ und $w = w_1$) wie folgt als Funktion der parametrisch fixierten Preise $p_1 \in \mathbb{R}^K$ sowie des Vermögens $w_1 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x_1^\star(w_1, p_1) &= \frac{1}{a}\Sigma_2^{-1}\left(\beta_2 + B_2 p_1 - R p_1\right) && (3.26)\\
&= \frac{1}{a}\Sigma_2^{-1}\left(\beta_2 - A_1 p_1\right) \\
y_1^\star(w_1, p_1) &= w_1 - p_1^\top x_1^\star(w_1, p_1). && (3.27)
\end{aligned}$$

Hierbei ergeben sich die Parameter (β_2, B_2, Σ_2) mit Gleichung (3.12) und es gilt

$$A_1 := [RI_K - B_2] \in \mathbb{R}^{K \times K}. \tag{3.28}$$

Insbesondere erkennt man, dass die Lösung (3.26) unabhängig von dem Vermögen w_1 ist. Da das Entscheidungsproblem (3.17) für jedes (w_1, p_1) eine Lösung besitzt, ist die Wertfunktion

$$V_1(w_1, p_1) := \max_{x,y}\left\{ U_1(x, y; p_1) \;\middle|\; y + x^\top p_1 = w_1 \right\} \tag{3.29}$$

wohldefiniert und liefert den in (w_1, p_1) parametrisierten, maximalen Erwartungsnutzen der Periode $t = 1$. Durch Einsetzen der Lösungen (3.26), (3.27) in die Erwartungsnutzenfunktion (3.22) erhält man die Wertfunktion (3.29) mit Lemma

3.5(2) (setze dazu wieder $c = 1$, $\theta = \beta_2 + B_2 p_1$, $\Theta = \Sigma_2$, $\alpha = a$, $p = p_1$ und $w = w_1$) und der Eigenschaft $(E1)$ aus Lemma 3.1(3) explizit als

$$\begin{aligned} V_1(w_1, p_1) &= u(w_1; aR)\ g(Rp_1; \beta_2 + B_2 p_1, \Sigma_2) \\ &= u(w_1; aR)\ g(A_1 p_1; \beta_2, \Sigma_2). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Für das weitere Vorgehen ist es erforderlich, den Ausdruck $g(A_1 p_1; \beta_2, \Sigma_2)$ in (3.30) in eine Gauss'sche Funktion von p_1 zu transformieren. Dies erfordert mit der Eigenschaft (E3) in Lemma 3 die Annahme, dass die Matrix A_1 aus (3.28) invertierbar ist.[28] Unter dieser Annahme erhält man die Wertfunktion als Resultat des ersten Schrittes als

$$V_1(w_1, p_1) = u(w_1; aR)\ g(p_1; \vartheta_1, \Omega_1), \tag{3.31}$$

wobei

$$\vartheta_1 := A_1^{-1} \beta_1 \tag{3.32}$$

$$\Omega_1 := A_1^{-1} \Sigma_2 A_1^{-\top} \in \mathcal{M}_K. \tag{3.33}$$

Insbesondere ist die Matrix Ω_1 symmetrisch und positiv definit da Σ_2 symmetrisch und positiv definit und die Matrix A_1 nichtsingulär ist.

Schritt 2: Entscheidungsproblem in $t = 0$

In einem zweiten Schritt wird nun das Entscheidungsproblem für $t = 0$ betrachtet. Der Investor besitzt in $t = 0$ annahmegemäß ein Portefeuille $(\bar{y}_{-1}, \bar{x}_{-1})$ aus

[28] Dies ist äquivalent zu der Annahme, dass R kein Eigenwert der Regressionsmatrix B_2 ist. Die Invertierbarkeit der Matrix A_1 ist erfüllt, wenn die Norm der Matrix $\frac{1}{R}B_2$ hinreichend klein ist, siehe Halmos (1974). Dies ist insbesondere für $\Sigma_{21} = 0 \Rightarrow B_2 = 0$ der Fall.

der Vorperiode, das sein parametrisch gegebenes Vermögen w mit Gleichung (3.1) definiert. Das Entscheidungsproblem in $t = 0$ bei Planungshorizont $j = 2$ besteht gemäß (3.10) in der Wahl einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie bestehend aus einer Portefeuilleentscheidung (x_0, y_0) für $t = 0$ und einem Plan $(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$ für $t = 1$.

Gegeben die Wertfunktion $V_1(w_1, p_1)$ aus (3.31) gilt nun analog zu den Ausführungen in Abschnitt 2.4 (vgl. (2.10)) wieder das folgende **Optimalitätsprinzip**:

$$\max_{H \in \mathscr{H}(\bar{z}_{-1}, p, d)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2K}} u\big(W_2(H, p_1^2)\big)\, \nu(dp_1^2) \right\} = \max_{y + x^\top p = w} \left\{ \int_{\mathbb{R}^K} V_1 \left(Ry + x^\top p, p\right) Q^{(1)}(dp) \right\}.$$

Die Randverteilung $Q^{(1)}$ der Zufallsvariablen p_1 ergibt sich dabei mit Gleichung (3.16). Gemäß dem Optimalitätsprinzip kann die optimale Portefeuilleentscheidung der Periode $t = 0$ somit unter Verwendung der Wertfunktion $V_1(w_1, p_1)$ als Lösung des folgenden, einstufigen Entscheidungsproblems ermittelt werden:

$$\max_{y,x} \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^K} V_1 \left(Ry + x^\top p, p\right) Q^{(1)}(dp) \\ \qquad\qquad u.d.N. \\ \qquad y + x^\top p = w \end{cases} \tag{3.34}$$

Die Zielfunktion des Entscheidungsproblems (3.34) kann unter Verwendung der Dichtefunktion aus (3.16) wie folgt geschrieben werden:

$$U_0(x, y) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^K} V_1(Ry + x^\top p, p)\; f(p; \mu_1, \Sigma_{11})\; dp. \tag{3.35}$$

Um eine Lösung des Entscheidungsproblems (3.34) zu erhalten, muss die Erwartungsnutzenfunktion (3.35) wieder so transformiert werden, dass Lemma 3.4 angewandt werden kann. Dazu nutzt man die spezielle Struktur des Integralkerns in (3.35) aus. Unter Verwendung der Beziehung (3.6) und (3.31) hat dieser die Form:

$$V_1(Ry + x^\top p, p) f(p; \mu_1, \Sigma_{11}) = \underbrace{u(Ry + x^\top p; Ra)}_{I}\, \underbrace{g(p; \vartheta_1, \Omega_1)}_{II}\, \underbrace{g(p; c(\Sigma_{11}), \mu_1, \Sigma_{11})}_{III}.$$

Unter Anwendung von Lemma 3.1(1) lässt sich das Produkt der Gauss'schen Funktionen II und III schreiben als:

$$\underbrace{g(p;\vartheta_1,\Omega_1)}_{II}\,\underbrace{g(p;c(\Sigma_{11}),\mu_1,\Sigma_{11})}_{III} \;=\; g(p;c_1,\theta_1,\Theta_1). \tag{3.36}$$

Hierbei ergibt sich die Matrix $\Theta_1 \in \mathcal{M}_K$ mit Lemma 3(1) und Gleichung (3.33) als

$$\begin{aligned}\Theta_1 &:= \left[\Sigma_{11}^{-1} + \Omega_1^{-1}\right]^{-1}\\ &= \left[\Sigma_{11}^{-1} + A_1^\top \Sigma_2^{-1} A_1\right]^{-1}\end{aligned} \tag{3.37}$$

und der Vektor $\theta_1 \in \mathbb{R}^K$ mit den Gleichungen (3.12), (3.28) und (3.32) als

$$\begin{aligned}\theta_1 &:= \Theta_1\left[\Sigma_{11}^{-1}\mu_1 + \Omega_1^{-1}\vartheta_1\right]\\ &= \Theta_1\left[\Sigma_{11}^{-1}\mu_1 + A_1^\top\Sigma_2^{-1}\beta_2\right]\\ &= \mu_1 + \left[\Theta_1 A_1^\top \Sigma_2^{-1}\right](\mu_2 - R\mu_1).\end{aligned} \tag{3.38}$$

Weiter gilt für die Konstante c_1 gemäß Lemma 3.1(1):

$$c_1 \;:=\; \frac{g(0;\vartheta_1,\Omega_1)\; g(0;c(\Sigma_{11}),\mu_1,\Sigma_{11})}{g(0;\theta_1,\Theta_1)} > 0.$$

Mit dieser Transformation hat der Integralkern in (3.35) nun die Form

$$V_1(Ry + x^\top p, p) f(p;\mu_1,\Sigma_{11}) \;=\; u(Ry + x^\top p; aR)\; g(p;c_1,\theta_1,\Theta_1). \tag{3.39}$$

Durch Einsetzen von (3.39) in (3.35) und Anwendung von Lemma 3.4 ergibt sich die Erwartungsnutzenfunktion (3.35) als:

$$U_0(x,y) \;=\; \frac{c_1}{c(\Theta_1)}\, u\left(Ry + x^\top\theta_1 - \frac{aR}{2}x^\top\Theta_1\, x; aR\right). \tag{3.40}$$

Das Entscheidungsproblem (3.34) kann daher geschrieben werden als:

$$\max_{y,x} \begin{cases} \dfrac{c_1}{c(\Theta_1)}\, u\left(Ry + x^\top \theta_1 - \dfrac{aR}{2} x^\top \Theta_1\, x; aR\right) \\ u.d.N. \\ y + x^\top p = w. \end{cases} \tag{3.41}$$

Für gegebene Erwartungen $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^{2K} \times \mathcal{M}_{2K}$ und feste Preise $p \in \mathbb{R}^K$ erhält man die Lösung des Problems (3.41) mit Lemma 3.5(1) als

$$\begin{aligned} x_0^\star &= \frac{1}{aR} \Theta_1^{-1} (\theta_1 - Rp) \\ y_0^\star &= w - p^\top x_0^\star, \end{aligned} \tag{3.42}$$

Hierbei ergeben sich die Parameter $(\theta_1, \Theta_1) \in \mathbb{R}^K \times \mathcal{M}_K$ aus (3.37) und (3.38). Man beobachtet, dass Θ_1 als Summe zweier symmetrischer, positiv definiter Matrizen selbst eine symmetrische, positiv definite Matrix ist, deren Einträge sich mit (3.12) und (3.28) ausschließlich aus der Varianz-Kovarianz-Matrix Σ der gemeinsamen Verteilung ergeben.
Im Gegensatz dazu wird der mit Gleichung (3.38) definierte Vektor θ_1 sowohl von dem Erwartungsvektor μ als auch von der Varianz-Kovarianz-Matrix Σ aus (3.11) bestimmt. Insbesondere ist θ_1 mit (3.38) eine *lineare Funktion* der Komponenten μ_1 und μ_2 des Erwartungsvektors.

Im Rahmen der bisherigen Betrachtungen waren die Momente $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^{2K} \times \mathcal{M}_{2K}$ aus (3.11) gegebene, feste Größen, die der Investor zu Beginn der Entscheidungsperiode gebildet hat (vgl. Fußnote auf Seite 46). Bei der Lösung des Entscheidungsproblems wurde unterstellt, dass die Blockmatrixeinträge $\Sigma_{21} = \Sigma_{12}^\top$ und Σ_{11} der Matrix Σ aus (3.11) so beschaffen sind, dass R kein Eigenwert der Regressionsmatrix $B_2 = \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}$ aus (3.12) ist, so dass die Matrix $A_1 = RI_K - B_2$

aus (3.28) invertierbar ist.[29]

Um sicherzustellen, dass die Lösung (3.42) des Entscheidungsproblems für alternative Erwartungsparameter (μ, Σ) wohldefiniert ist, muss die Menge der zulässigen Varianz-Kovarianz-Matrizen somit entsprechend eingeschränkt werden. Bezeichnet man mit die Menge aller Varianz-Kovarianz-Matrizen, für die die obige Invertierbarkeitsbedingung erfüllt ist, mit $\mathcal{M}_{2K}^{(R)} \subset \mathcal{M}_{2K}$, so lässt sich das Hauptresultat dieses Abschnittes in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 3.1 *Es seinen die Annahmen 3.1 und 3.2 bezüglich Erwartungen und Präferenzen erfüllt. Dann lässt sich die Aktiennachfrage eines Investors in $t = 0$ mit Planungshorizont $j = 2$ als Funktion seiner Erwartungen $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^{2K} \times \mathcal{M}_{2K}^{(R)}$ sowie der Preise $p \in \mathbb{R}^K$ schreiben als Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{2K} \times \mathcal{M}_{2K}^{(R)} &\longrightarrow \mathbb{R}^K \\ \varphi(p, \mu, \Sigma) &:= \frac{1}{aR} \left[\Theta(\Sigma)\right]^{-1} \Big(\theta\left(\mu, \Sigma\right) - Rp\Big). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Hierbei bezeichnen

$$\Theta : \mathcal{M}_{2K}^{(R)} \longrightarrow \mathcal{M}_K, \quad \Sigma \longmapsto \Theta\left(\Sigma\right) \tag{3.44}$$

und

$$\theta : \mathbb{R}^{2K} \times \mathcal{M}_{2K}^{(R)} \longrightarrow \mathbb{R}^K, \quad (\mu, \Sigma) \longmapsto \theta\left(\mu, \Sigma\right) \tag{3.45}$$

stetige Abbildungen, die sich unter Verwendung von (3.28) und (3.12) explizit ergeben als

$$\Theta\left(\Sigma\right) := \left[\Sigma_{11}^{-1} + A_1^{\top} \Sigma_2^{-1} A_1\right]^{-1} \tag{3.46}$$

$$\theta\left(\mu, \Sigma\right) := \mu_1 + \Theta(\Sigma) A_1^{\top} \Sigma_2^{-1} (\mu_2 - R\mu_1). \tag{3.47}$$

[29] Dies ist beispielsweise für $\Sigma_{21} = 0$ erfüllt.

Insbesondere impliziert Satz 3.1, dass die Nachfrage eines zweiperiodig planenden Investors in $t = 0$ der eines *myopisch* handelnden Investors entspricht, dessen Risikoaversion gegeben ist durch $aR > 0$ und dessen Erwartungen bezüglich der Preise p_1 der Folgeperiode gegeben sind durch die Momente $\mathbb{E}[p_1] = \theta(\mu, \Sigma)$ und $\mathbb{V}[p_1] = \Theta(\Sigma)$ (vgl. Böhm & Chiarella (2000)).

Unter Verwendung der Gleichungen (3.46) und (3.47) kann die Nachfragefunktion (3.43) explizit geschrieben werden als:

$$\varphi(p, \mu, \Sigma) = \frac{1}{aR}\Big(\big[\Sigma_{11}^{-1} + A_1^\top \Sigma_2^{-1} A_1\big](\mu_1 - Rp) + A_1^\top \Sigma_2^{-1}(\mu_2 - R\mu_1)\Big). \qquad (3.48)$$

Für den Spezialfall, dass die Zufallsvariablen p_1, p_2 als unabhängig unterstellt werden, gilt in (3.11) $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = 0$. In diesem Fall folgt aus (3.28) und (3.12) $A_1 = RI_K$ und $\Sigma_2 = \Sigma_{22}$, so dass sich (3.48) vereinfacht zu

$$\begin{aligned} \varphi(p, \mu, \Sigma) &= \frac{1}{R}\left(\frac{1}{a}\Sigma_{11}^{-1}(\mu_1 - Rp) + \frac{1}{a}\left[\frac{1}{R^2}\Sigma_{22}\right]^{-1}\left(\frac{1}{R}\mu_2 - Rp\right)\right) \\ &= \frac{1}{aR}\left(\Sigma_{11}^{-1}(\mu_1 - Rp) + \left[\frac{1}{R^2}\Sigma_{22}\right]^{-1}\left(\frac{1}{R}\mu_2 - Rp\right)\right). \end{aligned}$$

Die Nachfrage eines zweiperiodig planenden Investors ergibt sich in diesem Fall als Summe zweier *einperiodiger* Nachfragen mit Momenten (μ_1, Σ_{11}) bzw. diskontierten Momenten $\left(\frac{1}{R}\mu_2, \frac{1}{R^2}\Sigma_{22}\right)$ und entsprechend skalierter Risikoaversion aR.

3.4 Das j-periodige Entscheidungsproblem

Aufbauend auf den Überlegungen des vorherigen Abschnittes wird im Folgenden die Lösung des Entscheidungsproblems (3.10) für beliebiges aber festes $j > 0$, d.h. für einen beliebigen (endlichen) Planungszeitraum, betrachtet. Mit dem in Abschnitt 2.4 beschriebenen Ansatz der dynamischen Programmierung wird dabei das j-stufige Entscheidungsproblem (3.10) in j einstufige Probleme zerlegt.

Die Erwartungen des Investors in $t = 0$ bezüglich der Preise $p_1, \dots, p_j$ sind annahmegemäß gegeben durch eine multivariate Normalverteilung $\nu \in Prob(\mathbb{R}^{Kj})$. Diese Verteilung wird vollständig beschrieben durch die zugehörigen Verteilungsmomente $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^{Kj} \times \mathcal{M}_{Kj}$, die sich aus Gleichung (3.9) ergeben und die im Rahmen des Entscheidungsproblems als gegebene, fixe Größen betrachtet werden. Im Rahmen der rekursiven Lösung ist es analog zum vorherigen Abschnitt erforderlich, für jede Periode $t = 1, \cdots, j$ die bedingte Verteilung der Zufallsvariablen p_t gegeben eine Realisation der Preise $p_1, \dots, p_{t-1}$ zu beschreiben. Für die weiteren Betrachtungen wird für $t = 1, \dots, j$ die Kurzschreibweise

$$\mu_1^t := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{Kt} \qquad \Sigma_1^t := \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \dots & \Sigma_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{t1} & \dots & \Sigma_{tt} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{Kt} \tag{3.49}$$

verwendet. Darauf aufbauend werden für $t = 2, \cdots, j$ analog zum Fall $j = 2$ (vgl. (3.12)) die folgenden Parameter definiert, die sich aus der Partitionierung der Matrix $\Sigma_1^t = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{t-1} & S_t^\top \\ S_t & \Sigma_{tt} \end{bmatrix}$ mit $S_t := [\Sigma_{t,1} \dots \Sigma_{t,t-1}] \in \mathbb{R}^{K \times K(t-1)}$ ergeben:

$$\begin{aligned} B_t &:= S_t \left[\Sigma_1^{t-1}\right]^{-1} && \in \mathbb{R}^{K \times K(t-1)} \\ \beta_t &:= \mu_t - B_t \mu_1^{t-1} && \in \mathbb{R}^K, \qquad t = 2, \cdots, j. \\ \Sigma_t &:= \Sigma_{tt} - S_t \, [\Sigma_1^{t-1}]^{-1} S_t^\top \in \mathcal{M}^K. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Mit diesen Definitionen beschreibt das folgende Lemma eine Faktorisierung der Verteilung ν für den j-periodigen Fall.

Lemma 3.6 *Es sei die gemeinsame Verteilung $\nu \in Prob(\mathbb{R}^{Kj})$ der Zufallsvariablen $(p_1, \cdots, p_j)$ gegeben durch eine multivariate Normalverteilung mit den Momenten $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^{Kj} \times \mathcal{M}_{Kj}$ aus (3.9). Dann gilt:*

(1) Die gemeinsame Verteilung ν lässt sich zerlegen in $j-1$ bedingte Verteilungen $Q^{(t)} : \mathbb{R}^{K(t-1)} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^K) \longrightarrow [0,1]$, $t = 2, \cdots, j$ sowie eine Randverteilung $Q^{(1)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^K) \longrightarrow [0,1]$, so dass für jedes $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{Kj})$ die Zerlegung gilt:

$$\nu(E) = \int_{\mathbb{R}^K} \cdots \int_{\mathbb{R}^K} \mathbf{1}_E(p_1, \cdots, p_j) Q^{(j)}(p_1^{j-1}, dp_j) \cdots Q^{(2)}(p_1, dp_2) Q^{(1)}(dp_1).$$

(2) Für $t = 2, \cdots, j$ ergibt sich die bedingte Verteilung $Q^{(t)}(p_1^{t-1}, \cdot)$ der Zufallsvariablen p_t mit den Parameterdefinitionen aus (3.50) als nichtsinguläre Normalverteilung auf $\mathbb{R}^K$ mit bedingten Momenten $(\mu_{t|t-1}, \Sigma_t)$, wobei

$$\mu_{t|t-1} \quad := \quad \beta_t + B_t p_1^{t-1}. \tag{3.51}$$

Für jedes $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^K)$ und jedes $p_1^{t-1} \in \mathbb{R}^{K(t-1)}$ gilt somit

$$Q^{(t)}(p_1^{t-1}, E) \quad = \quad \int_E f(p; \beta_t + B_t p_1^{t-1}, \Sigma_t)\, dp. \tag{3.52}$$

(3) Die Randverteilung $Q^{(1)}$ der Zufallsvariablen p_1 ist gegeben durch eine Normalverteilung auf $\mathbb{R}^K$ mit zugehörigen Momenten $(\mu_1, \Sigma_{11}) \in \mathbb{R}^K \times \mathcal{M}_K$, die sich aus (3.9) ergeben. Für jedes $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^K)$gilt somit

$$Q^{(1)}(E) \quad = \quad \int_E f(p; \mu_1, \Sigma_{11})\, dp. \tag{3.53}$$

Beweis: Siehe Anhang A.5.

Insbesondere folgt mit (3.50) aus Lemma 3.3, dass die bedingte Varianz-Kovarianz-Matrix Σ_t für $t = 2, \cdots, j$ eine symmetrische, positiv definite $K \times K$ Matrix ist, die sich ebenso wie die Regressionsparameter (B_t, β_t) ausschließlich aus den Momenten (3.9) der gemeinsamen Verteilung ergibt. Weiter ist für $t = 2, \cdots, j$ der bedingte Erwartungswert $\mu_{t|t-1}$ eine lineare Funktion der Preise $p_1, \cdots, p_{t-1}$. Zerlegt man für jedes $t = 2, \cdots, j$ die Regressionsmatrix $B_t \in \mathbb{R}^{K \times K(t-1)}$ aus (3.50) in $K \times K$ Blockmatrizen, d.h.

$$B_t = \left[B_t^{(t-1)} \ldots B_t^{(1)} \right], \quad B_t^{(i)} \in \mathbb{R}^{K \times K}, i = 1, \ldots, t-1, \tag{3.54}$$

so lässt sich der bedingte Erwartungswert der Zufallsvariablen p_t aus Gleichung (3.51) komponentenweise schreiben als:

$$\mu_{t|t-1} = \beta_t + B_t^{(1)} p_{t-1} + \ldots + B_t^{(t-1)} p_1. \tag{3.55}$$

Darauf aufbauend wird für die folgenden Betrachtungen die Notation

$$\mu_{t|t-k} = \begin{cases} \beta_t + B_t^{(k)} p_{t-k} + \ldots + B_t^{(t-1)} p_1 & k = 1, \cdots, t-1 \\ \beta_t & k = t \end{cases} \tag{3.56}$$

verwendet.

Mit diesen Vorüberlegungen kann das Entscheidungsproblem (3.10) im Folgenden mit dem in Abschnitt 2.4 vorgestellten rekursiven Verfahren gelöst werden. Dazu wird das j-stufige Entscheidungsproblem (3.10) in j-einstufige Probleme zerlegt. Beginnend mit der vorletzten Periode $t = j-1$ und $V_j(w_j, p_1^j) \equiv u(w_j; a)$ wird für jedes $t = 1, \cdots, j-1$ ein einstufiges Entscheidungsproblem der folgenden Form betrachtet:

$$\max_{x,y} \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^K} V_{t+1}\left(Ry + x^\top p, p_1^t, p\right) Q^{(t+1)}(p_1^t, dp) \\ u.d.N. \\ y + x^\top p_t = w_t. \end{cases} \tag{3.57}$$

Die Preise $p_1, \ldots, p_t$ werden dabei ebenso wie das Vermögen $w_t := Ry_{t-1} + x_{t-1}^\top p_t$, das aus einem gegeben Portefeuille der Vorperiode resultiert, als parametrisch gegeben unterstellt. Die bedingte Verteilung $Q^{(t+1)}(p_1^t, \cdot)$ der Zufallsvariablen p_{t+1} ergibt sich in diesem Zusammenhang mit Gleichung (3.52).
Unter der Annahme, dass (3.57) für jedes t eine Lösung besitzt, erhält man eine Folge von Wertfunktionen $V_t(w_t, p_1^t)$, $t = 1, \cdots, j$, die sich rekursiv aus der folgenden Gleichung (vgl. (2.13)) ergeben:

$$V_t(w_t, p_1^t) = \max_{x,y} \left\{ \int_{\mathbb{R}^K} V_{t+1}(Ry + x^\top p, p_1^t, p)\, Q^{(t+1)}(p_1^t, dp) \,\middle|\, y + x^\top p_t = w_t \right\}. \quad (3.58)$$

Unter Verwendung der Wertfunktion $V_1(w_1, p_1)$, die sich im letzten Rekursionsschritt ergibt, kann das optimale Portefeuille für $t = 0$ analog zum Fall $j = 2$ als Lösung eines einstufigen Entscheidungsproblems ermittelt werden. Dabei wird wieder das in Abschnitt 2.4 beschriebene **Optimalitätsprinzip** (vgl. (2.14))

$$\max_{H \in \mathscr{H}(\bar{z}_{-1}, p, d)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{Kj}} u\left(W_j(H, p_1^j)\right) \nu(dp_1^j) \right\} = \max_{y + x^\top p = w} \left\{ \int_{\mathbb{R}^K} V_1\left(Ry + x^\top p, p\right) Q^{(1)}(dp) \right\}$$

ausgenutzt.
Um die optimale Portefeuilleentscheidung für $t = 0$ mit Hilfe der rekursiv definierten Wertfunktion $V_1(w_1, p_1)$ zu ermitteln, ist es erforderlich, induktiv für jeden Zeitpunkt $t = 1, \cdots, j-1$ die zugehörige Wertfunktion $V_t(w_t, p_1^t)$ zu beschreiben. Das weitere Vorgehen erfolgt nun in drei Schritten:

1. Betrachtung des Entscheidungsproblems (3.57) für $t = j - 1$, Ermittlung der zugehörige Wertfunktion $V_{j-1}(w_{j-1}, p_1^{j-1})$.

2. Betrachtung des Entscheidungsproblems (3.57) für beliebiges t, Ermittlung der Wertfunktion $V_t(w_t, p_1^t)$ im Rahmen eines Induktionsschrittes.

3. Lösung des Entscheidungsproblems für $t = 0$ unter Verwendung der Wertfunktion $V_1(w_1, p_1)$.

Schritt 1: Entscheidungsproblem in $t = j - 1$

In einem ersten Schritt wird das Entscheidungsproblem für $t = j - 1$, d.h. in der vorletzten Periode des Planungszeitraumes, betrachtet. Gegeben sei eine parametrische Realisation der Preise $p_1, \ldots, p_{j-1}$ und ein Portefeuille (x_{j-2}, y_{j-2}) aus der Vorperiode, dessen Ertrag $w_{j-1} := Ry_{j-2} + x_{j-2}^\top p_{j-1}$ das (ebenfalls parametrisch gegebene) Vermögen des Investors definiert.
In $t = j - 1$ reduziert sich das Entscheidungsproblem auf die Wahl einer erreichbaren Portefeuilleentscheidung (x_{j-1}, y_{j-1}), die den Erwartungsnutzen des Endvermögens maximiert. Unter Verwendung der mit (3.52) definierten bedingten Verteilung $Q^{(j)}(p_1^{j-1}, \cdot)$ der Zufallsvariablen p_j mit zugehöriger Dichtefunktion $f(\cdot; \beta_j + B_j p_1^{j-1}, \Sigma_j)$ erhält man das Entscheidungsproblem (3.57) für $t = j - 1$ als:

$$\max_{x,y} \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^K} u(Ry + x^\top p; a)\ f(p; \beta_j + B_j p_1^{j-1}, \Sigma_j)\ dp \\ \qquad\qquad u.d.N. \\ \qquad y + x^\top p_{j-1} = w_{j-1}. \end{cases} \tag{3.59}$$

Mit (3.6) und Lemma 3.4 kann die Zielfunktion des Problems (3.59) geschrieben werden als

$$\begin{aligned} U_{j-1}(x, y; p_1^{j-1}) &:= \int_{\mathbb{R}^K} u(Ry + x^\top p; a)\ g(p; c(\Sigma_j), \beta_j + B_j p_1^{j-1}, \Sigma_j)\ dp \\ &= u\left(Ry + x^\top(\beta_j + B_j p_1^{j-1}) - \frac{a}{2}\, x^\top \Sigma_j\ x;\ a\right). \end{aligned} \tag{3.60}$$

Das Entscheidungsproblem (3.59) erhält man somit als:

$$\max_{y,x} \begin{cases} u\left(Ry + x^\top(\beta_j + B_j p_1^{j-1}) - \frac{a}{2}\, x^\top \Sigma_j\ x;\ a\right) \\ \qquad\qquad u.d.N. \\ \qquad y + x^\top p_{j-1} = w_{j-1}. \end{cases} \tag{3.61}$$

Die Lösung des Problems (3.61) ergibt sich mit Lemma 3.5(1) wie folgt als Funktion der parametrisch fixierten Variablen w_{j-1} und $p_1, \ldots, p_{j-1}$:

$$x^\star_{j-1}(w_{j-1}, p_1^{j-1}) \;=\; \frac{1}{a}\Sigma_j^{-1}\left(\beta_j + B_j p_1^{j-1} - Rp_{j-1}\right) \tag{3.62}$$

$$y^\star_{j-1}(w_{j-1}, p_1^{j-1}) \;=\; w_{j-1} - p_{j-1}^\top x^\star_{j-1}(w_{j-1}, p_1^{j-1}) \tag{3.63}$$

Mit der Zerlegung (3.54) der Matrix B_j in Blockmatrizen $B_j^{(n)}, n = 1, \cdots, j-1$ lässt sich die Lösungsfunktion (3.62) mit der Notation aus (3.56) schreiben als

$$x^\star_{j-1}(w_{j-1}, p_1^{j-1}) \;=\; \frac{1}{a}\Sigma_j^{-1}\Big(\mu_{j|j-2} - A_{j-1}^{(1)} p_{j-1}\Big) \tag{3.64}$$

$$\text{mit} \quad A_{j-1}^{(1)} \;:=\; \Big[RI_K - B_j^{(1)}\Big] \in \mathbb{R}^{K\times K}. \tag{3.65}$$

Einsetzen der Lösungen (3.63) und (3.62) bzw. (3.64) in (3.60) liefert mit Lemma 3.5(2) (setze dazu $c = 1$, $\Theta = \Sigma_j$, $\theta = \mu_{j|j-1} = \beta_j + B_j p_1^{j-1}$, $\alpha = a$, $p = p_{j-1}$ und $w = w_{j-1}$) und der Eigenschaft (E1) aus Lemma 3.1 die Wertfunktion

$$\begin{aligned} V_{j-1}(w_{j-1}, p_1^{j-1}) \;&:=\; \max_{x,y}\Big\{U_{j-1}(x, y; p_1^{j-1}) \,\big|\, y + x^\top p_{j-1} = w_{j-1}\Big\} \\ &=\; u\Big(w_{j-1}; aR\Big)\; g\Big(Rp_{j-1}; \mu_{j|j-1}, \Sigma_j\Big) \\ &=\; u\Big(w_{j-1}; aR\Big)\; g\Big(A_{j-1}^{(1)} p_{j-1}; \mu_{j|j-2}, \Sigma_j\Big). \end{aligned} \tag{3.66}$$

Unter der Annahme, dass die Matrix $A_{j-1}^{(1)}$ aus (3.65) invertierbar ist, ergibt sich aus (3.66) die Wertfunktion der Periode $t = j-1$ mit der Eigenschaft (E3) aus Lemma 3.1 als Resultat des ersten Schrittes als:

$$\begin{aligned} V_{j-1}(w_{j-1}, p_1^{j-1}) \;&=\; u\Big(w_{j-1}; aR\Big)\, g\Big(p_{j-1}; \vartheta_{j-1}, \Omega_{j-1}\Big) \\ \text{mit} \quad \vartheta_{j-1} \;&:=\; A_{j-1}^{(1)-1}\mu_{j|j-2} \\ \Omega_{j-1} \;&:=\; A_{j-1}^{(1)-1}\Sigma_j A_{j-1}^{(1)-\top}. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Dabei sind die Terme $\mu_{j|j-2}$ bzw. ϑ_{j-1} (lineare) Funktionen der Preise $p_1, \ldots, p_{j-2}$. Weiter ist die Matrix Ω_{j-1} symmetrisch und – mit der Invertierbarkeit der Matrix $A_{j-1}^{(1)}$ – positiv definit.

Schritt 2: Entscheidungsproblem für beliebiges t, Induktionsschritt

Ziel des folgenden Abschnittes ist es, für jeden Zeitpunkt $t = 1, \cdots, j-1$ die Form der zugehörige Wertfunktion $V_t(w_t, p_1^t)$ zu beschreiben. Um dabei sicherzustellen, dass die Wertfunktionen auf jeder Stufe wohldefinierte Objekte sind, ist die folgende Invertierbarkeitsannahme erforderlich.[30]

Annahme 3.3 *Gegeben die Regressionsparameter aus (3.50) sind auf jeder Stufe* $t = 1, \cdots, j-1$ *die Matrizen*

$$A_t^{(n)} := \begin{cases} I_K & n = 0 \\ R^n I_K - R^{n-1} B_{t+n}^{(1)} - \ldots - B_{t+n}^{(n)} & n = 1, \cdots, j-t \end{cases} \tag{3.68}$$

für jedes $n = 1, \cdots, j-t$ *nichtsingulär und damit invertierbar.*

Aufbauend auf Annahme 3.3 werden für die weiteren Betrachtungen unter Verwendung der Gleichungen (3.50), (3.55), (3.56) und (3.68) für $t = 1, \cdots, j$ die folgenden Parameter definiert:

$$\begin{aligned} \vartheta_t^{(n)} &:= A_t^{(n)-1} \mu_{t+n|t-1} \\ \Omega_t^{(n)} &:= A_t^{(n)-1} \Sigma_{t+n} A_t^{(n)-\top}, \qquad n = 0, 1, \cdots, j-t \\ c_t^{(n)} &:= \frac{c(\Omega_{t+n}^{(0)})}{c\Big(\Big[\sum_{i=0}^{j-(t+n)} \Omega_{t+n}^{(i)-1}\Big]^{-1}\Big)}. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Man beobachtet mit Gleichung (3.56), dass die Terme $\vartheta_t^{(n)}$ lineare Funktionen der Preise $p_1, \cdots, p_{t-1}$ sind, die Matrizen $\Omega_t^{(n)}$ sich dagegen ebenso wie die Parameter $c_t^{(n)}$ über (3.50) und (3.68) ausschließlich aus der Varianz-Kovarianz-Matrix Σ der gemeinsamen Verteilung ergeben. Insbesondere sind die $\Omega_t^{(n)}$ symmetrische,

[30] Man ersieht aus Gleichung (3.67), dass diese Annahme für $t = j-1$ und die Matrix $A_{j-1}^{(1)}$ aus (3.65) bereits unterstellt wurde.

positiv definite $K \times K$ Matrizen und die Parameter $c_t^{(n)}$ strikt positive reele Zahlen. Unter Verwendung der Parameterdefinitionen (3.69) liefert der folgende Satz die Form der mit (3.58) rekursiv definierten Wertfunktionen.

Satz 3.2 *Es sei Annahme 3.3 erfüllt. Dann sind die mit Gleichung (3.58) rekursiv definierten Wertfunktionen $V_t(w_t, p_1^t)$, $t = 1, \cdots, j-1$, wohldefiniert und mit den Parameterdefinitionen (3.69) von der folgenden Form:*

$$
\begin{aligned}
V_t(w_t, p_1^t) &= u\left(w_t; aR^{j-t}\right)\, g\left(p_t; c_t, \vartheta_t, \Omega_t\right) && (3.70)\\
\textit{mit} \qquad \Omega_t &:= \left[\sum_{n=1}^{j-t} \Omega_t^{(n)-1}\right]^{-1} \\
\vartheta_t &:= \Omega_t \sum_{n=1}^{j-t} \Omega_t^{(n)-1} \vartheta_t^{(n)} && (3.71)\\
c_t &:= \frac{\prod_{n=1}^{j-t} g(0; c_t^{(n)}, \vartheta_t^{(n)}, \Omega_t^{(n)})}{g(0; \vartheta_t, \Omega_t)}.
\end{aligned}
$$

Beweis: Mit Gleichung (3.67) ist die Behauptung (3.70) für $t = j-1$ erfüllt. Um die Aussage durch vollständige Induktion zu zeigen, wird das mit (3.57) definierte Entscheidungsproblem für beliebiges $t \in \{1, \cdots, j-2\}$ unter der Annahme betrachtet, dass die Behauptung für die Wertfunktion $V_{t+1}(w_{t+1}, p_1^{t+1})$ erfüllt ist. Die Induktionsannahme lautet also:

$$
\begin{aligned}
V_{t+1}(w_{t+1}, p_1^{t+1}) &= u\left(w_{t+1}; aR^{j-(t+1)}\right)\, g\left(p_{t+1}; c_{t+1}, \vartheta_{t+1}, \Omega_{t+1}\right) && (3.72)\\
\text{mit} \qquad \Omega_{t+1} &= \left[\sum_{n=1}^{j-(t+1)} \Omega_{t+1}^{(n)-1}\right]^{-1} \\
\vartheta_{t+1} &= \Omega_{t+1} \sum_{n=1}^{j-(t+1)} \Omega_{t+1}^{(n)-1} \vartheta_{t+1}^{(n)} && (3.73)\\
c_{t+1} &= \frac{\prod_{n=1}^{j-(t+1)} g(0; c_{t+1}^{(n)}, \vartheta_{t+1}^{(n)}, \Omega_{t+1}^{(n)})}{g(0; \vartheta_{t+1}, \Omega_{t+1})}.
\end{aligned}
$$

Zu zeigen ist nun, dass aus der Induktionsannahme (3.72) die Form (3.70) der Wertfunktion $V_t(w_t, p_1^t)$ folgt. Dazu ermittelt man aus dem einstufigen Entscheidungsproblem (3.57) die Wertfunktion $V_t(w_t, p_1^t)$.
Unter Verwendung der bedingten Dichte aus (3.52) kann die Zielfunktion des Entscheidungsproblems (3.57) geschrieben werden als:

$$U_t(x, y; p_1^t) := \int_{\mathbb{R}^K} V_{t+1}(Ry + x^\top p, p_1^t, p)\, f(p; \beta_{t+1} + B_{t+1}p_1^t, \Sigma_{t+1})\, dp. \tag{3.74}$$

Setzt man wieder $\mu_{t+1|t} = \beta_{t+1} + B_{t+1}p_1^t$, so ergibt sich die Zielfunktion (3.74) unter der Induktionsannahme (3.72) und Ausnutzung von (3.6) wie folgt:

$$\begin{aligned} U_t(x, y; p_1^t) &= \int_{\mathbb{R}^K} \overbrace{u(Ry + x^\top p; aR^{j-t-1})}^{I}\ \overbrace{g(p; c_{t+1}, \vartheta_{t+1}, \Omega_{t+1})}^{II} \\ &\qquad \underbrace{g(p; c(\Sigma_{t+1}), \mu_{t+1|t}, \Sigma_{t+1})}_{III}\, dp. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Mit Lemma 3.1(1) können die Gauss'schen Funktionen II und III in (3.75) wie folgt zusammengefasst werden:

$$\underbrace{g(p; c_{t+1}, \vartheta_{t+1}, \Omega_{t+1})}_{II}\ \underbrace{g(p; c(\Sigma_{t+1}), \mu_{t+1|t}, \Sigma_{t+1})}_{III} = g(p; \hat{c}_{t+1}, \theta_{t+1}, \Theta_{t+1}) \tag{3.76}$$

$$\text{mit}\quad \begin{aligned} \Theta_{t+1} &:= \left[\Sigma_{t+1}^{-1} + \Omega_{t+1}^{-1}\right]^{-1} \\ \theta_{t+1} &:= \Theta_{t+1}\left[\Sigma_{t+1}^{-1}\mu_{t+1|t} + \Omega_{t+1}^{-1}\vartheta_{t+1}\right] \\ \hat{c}_{t+1} &:= \frac{g(0; c_{t+1}, \vartheta_{t+1}, \Omega_{t+1})g(0; c(\Sigma_{t+1}), \mu_{t+1|t}, \Sigma_{t+1})}{g(0; \theta_{t+1}, \Theta_{t+1})}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Durch Einsetzen von (3.76) in (3.75) und Anwendung von Lemma 3.4 (mit $c = \hat{c}_{t+1}$, $\Theta = \Theta_{t+1}$, $\theta = \theta_{t+1}$ und $\alpha = aR^{j-t-1}$) ergibt sich die Zielfunktion (3.75) als:

$$\begin{aligned} U_t(x, y; p_1^t) &= \int_{\mathbb{R}^K} u(Ry + x^\top p; aR^{j-t-1})g(p; \hat{c}_{t+1}, \theta_{t+1}, \Theta_{t+1})\, dp \\ &= \frac{\hat{c}_{t+1}}{c(\Theta_{t+1})} u\left(Ry + x^\top\theta_{t+1} - \frac{aR^{j-t-1}}{2}x^\top\Theta_{t+1}x; aR^{j-t-1}\right). \end{aligned} \tag{3.78}$$

Mit (3.78) erhält man das Entscheidungsproblem (3.57) somit als:

$$\max_{x,y} \begin{cases} \dfrac{\hat{c}_{t+1}}{c(\Theta_{t+1})} u\left(Ry + x^\top \theta_{t+1} - \dfrac{aR^{j-t-1}}{2} x^\top \Theta_{t+1} x; aR^{j-t-1}\right) \\ u.d.N. \\ y + x^\top p_t = w_t \end{cases} \tag{3.79}$$

Aus dem Entscheidungsproblem (3.79) ergibt sich mit Lemma 3.5(2) (wobei $c = \frac{\hat{c}_{t+1}}{c(\Theta_{t+1})}$, $\Theta = \Theta_{t+1}$, $\theta = \theta_{t+1}$, $\alpha = aR^{j-t-1}$, $p = p_t$ und $w = w_t$) die folgende Wertfunktion:

$$\begin{aligned} V_t(w_t, p_1^t) &= \max_{x,y} \left\{ U_t(x, y; p_1^t) \middle| y + x^\top p_t = w_t \right\} \\ &= u(w_t; aR^{j-t})\, g(Rp_t; \frac{\hat{c}_{t+1}}{c(\Theta_{t+1})}, \theta_{t+1}, \Theta_{t+1}). \end{aligned}$$

Für die Behauptung ist nun die Gültigkeit des folgenden Lemmas zu zeigen:

Lemma 3.7 *Gegeben die Parameterdefinitionen (3.69),(3.73) und (3.77) gilt der Zusammenhang:*

$$g(Rp_t; \frac{\hat{c}_{t+1}}{c(\Theta_{t+1})}, \theta_{t+1}, \Theta_{t+1}) = g(p_t; c_t, \vartheta_t, \Omega_t). \tag{3.80}$$

Der Beweis von Lemma 3.7 findet sich im Anhang A.6. Somit gilt

$$V_t(w_t, p_1^t) = u(w_t; aR^{j-t})\, g(p_t; c_t, \vartheta_t, \Omega_t)$$

und damit die Behauptung (3.70). ∎

Die Lösbarkeit des Entscheidungsproblems (3.10) mit dem hier verwendeten rekursiven Verfahren erfordert also insbesondere, dass die Invertierbarkeitsbedingung aus Annahme 3.3 erfüllt ist. Gegeben die risikolose Rendite $R > 0$ wird die Gültigkeit dieser Annahme über (3.50) und (3.68) ausschließlich von der Gestalt der Varianz-Kovarianz-Matrix Σ aus (3.9) bestimmt. Für den Spezialfall, dass die Preise zu verschiedenen Zeitpunkten als unkorreliert gelten, d.h. $\Sigma_{ts} = 0$ $\forall t, s \in \{1, \cdots, j\}$, $t \neq s$, ist die Bedingung generisch erfüllt, da in diesem Fall alle Regressionsmatrizen B_t in (3.50) Nullmatrizen sind und somit in (3.68) gilt: $A_t^{(n)} = R^n I_K$, $n = 0, \cdots, j - t$.

Für den Fall, dass die Preise als Markoff-Prozess unterstellt werden, d.h. $\Sigma_{ts} = 0$ für $|t - s| > 1$, folgt mit Gleichung (3.50), dass $B_t^{(n)} = 0$ für $t = 1, \cdots, j - 1$ und $n > 1$. In diesem Fall vereinfachen sich die Terme in Gleichung (3.68) zu $A_t^{(n)} = R^{n-1} \left[RI_K - B_{t+n}^{(1)} \right]$, $n = 0, \cdots, j - t$ und die Invertierbarkeit ist analog zu dem zweiperiodigen Fall erfüllt, wenn die Regressionsmatrix $B_{t+n}^{(1)}$ keinen Eigenwert R besitzt. Eine ökonomische Interpretation der Invertierbarkeitsbedingungen ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt leider nicht verfügbar, jedoch ist ein Zusammenhang zu der in Abschnitt 2.4 formulierten Nichtredundanzbedingung aus Annahme 2.3 (1) zu vermuten.

Schritt 3: Entscheidungsproblem in $t = 0$

Unter Verwendung der mit (3.70) definierten Wertfunktion $V_1(w_1, p_1)$ kann das Entscheidungsproblem in $t = 0$ mit dem oben beschriebenen Optimalitätsprinzip als einstufiges Maximierungsproblem formuliert werden. Gegeben parametrische Preise $p \in \mathbb{R}^K$ und ein mit Gleichung (3.1) definiertes Vermögen $w \in \mathbb{R}$ lautet das Entscheidungsproblem unter Verwendung der Randdichte $f(\,\cdot\,; \mu_1, \Sigma_{11})$ der Zufallsvariablen p_1 aus (3.53):

$$\max_{x,y} \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^K} V_1\left(Ry + x^\top p, p\right) f(p; \mu_1, \Sigma_{11})\, dp \\ \qquad\qquad u.d.N \\ \qquad y + x^\top p = w. \end{cases} \tag{3.81}$$

Die Wertfunktion $V_1(w_1, p_1)$ ergibt sich dabei mit Satz 3.2 als:

$$\begin{aligned} V_1(w_1, p_1) &= u\left(w_1; aR^{j-1}\right)\, g\left(p_1; c_1, \vartheta_1, \Omega_1\right) && (3.82)\\ \text{mit} \quad \Omega_1 &:= \left[\sum_{n=1}^{j-1} \Omega_1^{(n)-1}\right]^{-1} \\ \vartheta_1 &:= \Omega_1 \sum_{n=1}^{j-1} \Omega_1^{(n)-1} \vartheta_1^{(n)} && (3.83)\\ c_1 &:= \frac{\prod_{n=1}^{j-1} g(0; c_1^{(n)}, \vartheta_1^{(n)}, \Omega_1^{(n)})}{g(0; \vartheta_1, \Omega_1)}. \end{aligned}$$

Das weitere Vorgehen ist nun vollkommen analog zu Schritt 2 in Abschnitt 3.3. Mit (3.82) und (3.6) lässt sich die Zielfunktion in (3.81) schreiben als:

$$\begin{aligned} U_0(x, y) &:= \int_{\mathbb{R}^K} V_1\left(Ry + x^\top p, p\right) f(p; \mu_1, \Sigma_{11})\, dp \\ &\int_{\mathbb{R}^K} \underbrace{u(Ry + x^\top p; aR^{j-1})}_{I}\, \underbrace{g(p; c_1, \vartheta_1, \Omega_1)}_{II}\, \underbrace{g(p; c(\Sigma_{11}), \mu_1, \Sigma_{11})}_{III}\, dp \quad (3.84) \end{aligned}$$

Unter Anwendung von Lemma 3.1(1) lässt sich das Produkt der Gauss'schen Funktionen II und III in (3.84) wie folgt zusammenfassen:

$$\underbrace{g(p; c_1, \vartheta_1, \Omega_1)}_{II}\,\underbrace{g(p; c(\Sigma_{11}), \mu_1, \Sigma_{11})} _{III} \;=\; g(p; \hat{c}_1, \theta_1, \Theta_1). \tag{3.85}$$

Dabei ergibt sich die Matrix Θ_1 mit Lemma 3.1(1) und den Gleichungen (3.69) und (3.83) als

$$\begin{aligned} \Theta_1 \;&:=\; \left[\Sigma_{11}^{-1} + \Omega_1^{-1}\right]^{-1} \\ &= \left[\Sigma_{11}^{-1} + A_1^{(1)\top}\Sigma_2^{-1}A_1^{(1)} + \cdots + A_1^{(j-1)\top}\Sigma_j^{-1}A_1^{(j-1)}\right]^{-1} \in \mathcal{M}_K \end{aligned} \tag{3.86}$$

und der Vektor θ_1 mit den Gleichungen (3.56), (3.69) und (3.83) als

$$\begin{aligned} \theta_1 \;&:=\; \Theta_1\left[\Sigma_{11}^{-1}\mu_1 + \Omega_1^{-1}\vartheta_1\right] \\ &= \Theta_1\left[\Sigma_{11}^{-1}\mu_1 + A_1^{(1)\top}\Sigma_2^{-1}\beta_1 + \cdots + A_1^{(j-1)\top}\Sigma_j^{-1}\beta_j\right] \in \mathbb{R}^K. \end{aligned} \tag{3.87}$$

Weiter gilt mit Lemma 3.1(1) für die Konstante $\hat{c}_1$ in (3.85):

$$\hat{c}_1 \;:=\; \frac{g(0; c_1, \vartheta_1, \Omega_1)\; g(0; c(\Sigma_{11}), \mu_1, \Sigma_{11})}{g(0; \theta_1, \Theta_1)} > 0. \tag{3.88}$$

Einsetzen von (3.85) in (3.84) und Anwendung von Lemma 3.4 liefert:

$$\begin{aligned} U_0(x,y) \;&=\; \int_{\mathbb{R}^K} u(Ry + x^\top p; aR^{j-1})\; g(p; \hat{c}_1, \theta_1, \Theta_1)\; dp \\ &= \frac{\hat{c}_1}{c(\Theta_1)}\; u\left(Ry + x^\top\theta_1 - \frac{aR^{j-1}}{2}x^\top\Theta_1\, x; aR^{j-1}\right). \end{aligned} \tag{3.89}$$

Das Entscheidungsproblem (3.81) kann somit wie folgt geschrieben werden:

$$\max_{y,x}\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\hat{c}_1}{c(\Theta_1)}\; u\Big(Ry + x^\top\theta_1 - \dfrac{aR^{j-1}}{2}x^\top\Theta_1\, x; aR^{j-1}\Big) \\ u.d.N. \\ y + x^\top p = w. \end{array}\right. \tag{3.90}$$

Für gegebene Erwartungsparameter (μ, Σ) und feste Preise $p \in \mathbb{R}^K$ ergibt sich die Lösung des j-periodigen Entscheidungsproblems (3.90) mit Lemma 3.5(1) als:

$$\begin{aligned} x_0^\star &= \frac{1}{aR^{j-1}} \Theta_1^{-1}(\theta_1 - Rp) \\ y_0^\star &= w - p^\top x_0^\star. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Man beobachtet in diesem Zusammenhang, dass die mit (3.86) definierte $K \times K$-Matrix Θ_1 als Inverse einer Summe positiv definiter, symmetrischer Matrizen ebenfalls symmetrisch und positiv definit und damit insbesondere invertierbar ist. Dabei wird Θ_1 über (3.50) und (3.68) ausschließlich von den Einträgen der Varianz-Kovarianz-Matrix Σ aus (3.9) sowie der risikolosen Rendite R bestimmt. Weiter wird der Vektor θ_1 aus (3.87) über (3.50), (3.68) und (3.86) sowohl von dem subjektiven Erwartungswert μ als auch von der Varianz-Kovarianz-Matrix Σ aus (3.9) bestimmt. Insbesondere lässt sich durch Einsetzen von (3.50) in (3.87) zeigen, dass θ_1 linear von den Erwartungswerten $\mu_1, \cdots, \mu_j$ aus (3.9) abhängt.

Im Rahmen der rekursiven Lösung des Entscheidungsproblems wurde die Erwartungsparameter (μ, Σ) aus (3.9) bislang als gegebene fixe Größen betrachtet. Dabei wurde unterstellt, dass die Einträge der Varianz-Kovarianz-Matrix Σ so beschaffen sind, dass die Invertierbarkeit der Matrizen $A_t^{(n)}$ aus Annahme 3.3 für jedes t und $n = 1, \cdots, j-t$ erfüllt ist.
Um sicherzustellen, dass die Lösung (3.91) für alternative Erwartungen $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^{Kj} \times \mathcal{M}_{Kj}$ wohldefiniert ist, muss die Menge der zulässigen Varianz-Kovarianz-Matrizen somit auf solche eingeschränkt werden, die die Invertierbarkeitsbedingung aus Annahme 3.3 erfüllen. Dazu bezeichne im Folgenden $\mathcal{M}_{Kj}^{(R)} \subset \mathcal{M}_{Kj}$ die Menge aller geeigneten Varianz-Kovarianz-Matrizen, die diese Bedingung erfüllen.[31]

[31] Man beachte, dass die Menge $\mathcal{M}_{Kj}^{(R)}$ insbesondere die (Block-) Diagonalmatrizen der Form $\Sigma = diag(\Sigma_{11}, \cdots, \Sigma_{jj})$ (vgl. S. 61) enthält und damit nichtleer ist.

Mit dieser Einschränkung kann das für den Spezialfall $j = 2$ gültige Resultat aus Satz 3.1 auf einen beliebigen, endlichen Planungshorizont übertragen werden. Der folgende Satz beschreibt somit das **Hauptresultat** dieses Kapitels.

Satz 3.1 *Es seien die Annahmen 3.1 und 3.2 bezüglich Erwartungen und Präferenzen erfüllt und der Planungshorizont $j > 0$ sei beliebig aber fest. Dann lässt sich die Nachfrage des Investors nach riskanten Wertpapieren in $t = 0$ wie folgt als Funktion seiner Erwartungen $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^{Kj} \times \mathcal{M}_{Kj}^{(R)}$ aus (3.9) sowie der Preise $p \in \mathbb{R}^K$ schreiben:*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{Kj} \times \mathcal{M}_{Kj}^{(R)} &\longrightarrow \mathbb{R}^K \\ \varphi(p, \mu, \Sigma) &:= \frac{1}{aR^{j-1}} \left[\Theta\left(\Sigma\right)\right]^{-1} \left(\theta\left(\mu, \Sigma\right) - Rp\right). \end{aligned} \tag{3.92}$$

Hierbei bezeichnen

$$\Theta : \mathcal{M}_{Kj}^{(R)} \longrightarrow \mathcal{M}_K, \quad \Sigma \longmapsto \Theta(\Sigma) \tag{3.93}$$

und

$$\theta : \mathbb{R}^{Kj} \times \mathcal{M}_{Kj}^{(R)} \longrightarrow \mathbb{R}^K, \quad (\mu, \Sigma) \longmapsto \theta(\mu, \Sigma) \tag{3.94}$$

stetige Abbildungen, die sich unter Verwendung der Parameter aus den Gleichungen (3.68) und (3.50) wie folgt ergeben:

$$\Theta\left(\Sigma\right) := \left[\Sigma_{11}^{-1} + A_1^{(1)\top} \Sigma_2^{-1} A_1^{(1)} + \cdots + A_1^{(j-1)\top} \Sigma_j^{-1} A_1^{(j-1)}\right]^{-1} \tag{3.95}$$

$$\theta\left(\mu, \Sigma\right) := \Theta(\Sigma) \left[\Sigma_{11}^{-1} \mu_1 + A_1^{(1)\top} \Sigma_2^{-1} \beta_1 + \cdots + A_1^{(j-1)\top} \Sigma_j^{-1} \beta_j\right]. \tag{3.96}$$

Im Rahmen der bisherigen Betrachtungen war der Entscheidungshorizont j eine beliebig gewählte, jedoch fixe Größe. Um im Folgenden alternative Planungszeiträume zu betrachten, werden die Abbildungen $\varphi(\cdot), \Theta(\cdot), \theta(\cdot)$ aus (3.92), (3.93) und (3.94) mit dem entsprechenden Planungshorizont j indiziert. Die Nachfrage eines j-periodig planenden Investors mit entsprechenden Erwartungsparametern $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^{Kj} \times \mathcal{M}_{Kj}$ wird somit geschrieben als Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^{(j)} : \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{Kj} \times \mathcal{M}_{Kj}^{(R)} &\longrightarrow \mathbb{R}_K \\ \varphi^{(j)}(p, \mu, \Sigma) &:= \frac{1}{aR^{j-1}} \left[\Theta^{(j)}(\Sigma)\right]^{-1} \left(\theta^{(j)}(\mu, \Sigma) - Rp\right). \end{aligned} \tag{3.97}$$

Hierbei ergeben sich die Abbildungen $\Theta^{(j)}(\cdot), \theta^{(j)}(\cdot)$ für beliebiges, endliches $j > 0$ mit den Gleichungen (3.95) und (3.96). Insbesondere gilt für $j = 1$ $\Theta^{(1)}(\Sigma) = \Sigma$ und $\theta^{(1)}(\mu, \Sigma) = \mu$. Für einen einperiodig planenden Investor ergibt sich unter den Annahmen 3.1 und 3.2 bezüglich Erwartungen und Präferenzen somit die herkömmliche CAPM-Nachfrage (vgl. Böhm & Chiarella (2000)).

Das zentrale Resultat dieses Kapitels lautet mit Satz 3.1 somit, dass die Nachfrage eines j-periodig planenden Investors unter den gemachten Annahmen der eines myopisch handelnden Investors entspricht, dessen Risikoaversion gegeben ist durch $aR^{j-1} > 0$ und dessen Erwartungen bezüglich der Preise p_1 der Folgeperiode gegeben sind durch die Momente $\mathbb{E}[p_1] = \theta^{(j)}(\mu, \Sigma)$ und $\mathbb{V}[p_1] = \Theta^{(j)}(\Sigma)$. Somit kann das Nachfrageverhalten eines mehrperiodig planenden Investors innerhalb des hier vorgestellten CAPM-Rahmens immer durch einen einperiodig planenden Investor mit geeigneten Erwartungen und Präferenzen dargestellt werden.

3.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das mehrperiodige Portefeuille-Entscheidungsproblem unter den Annahmen des CAPM untersucht. Es wurde gezeigt, dass das Entscheidungsproblem bei einem beliebigen endlichen Planungszeitraum – unter einschränkenden Annahmen bzgl. der subjektiven Varianz-Kovarianz-Matrizen – zu einer explizit definierten Nachfragefunktion nach Wertpapieren führt. Diese entspricht unter den gemachten Annahmen strukturell der Nachfrage eines myopisch handelnden Investors. Somit kann das Nachfrageverhalten eines mehrperiodig planenden Investors innerhalb des hier vorgestellten CAPM-Rahmens immer durch einen einperiodig planenden Investor mit geeigneten Erwartungen und Präferenzen dargestellt werden.

4 Preisdynamik im Mehrperiodigen CAPM

4.1 Preisbildung im CAPM

Aufbauend auf den Resultaten des vorherigen Kapitels wird im Folgenden die Preisbildung und -dynamik im mehrperiodigen CAPM untersucht. Dazu wird das mehrperiodige Portefeuilleentscheidungsproblem, das im vorangegangenen Kapitel unter den Annahmen des CAPM betrachtet wurde, in den sequentiellen Modellrahmen aus Kapitel 2 eingebettet. Unter Verwendung der individuellen Nachfragen nach Wertpapieren wird zunächst das ökonomische Preisbildungsgesetz explizit hergeleitet. Anschließend wird die Dynamik der Preise bei homogenen unverzerrten Erwartungen der Investoren theoretisch und mit Hilfe numerischer Simulationen untersucht. Alle Annahmen des vorherigen Kapitels behalten, soweit nichts Gegenteiliges gesagt wird, ihre Gültigkeit.

Es bezeichne $\mathbb{I}$ wieder die Menge der handelnden Investoren, die auf dem Markt agieren, so dass in jeder Periode $t \in \mathbb{N}$ das Tupel $(i, j) \in \mathbb{I}$ einen Investor vom Typ $i \in \{1, \cdots, I\}$ kennzeichnet, der am Ende der Periode $t + j$ den Markt verlässt und somit ein j-periodiges Entscheidungsproblem der Form (3.10) löst. Zu Beginn der betrachteten Periode bildet jeder Investor $(i, j) \in \mathbb{I}$ Erwartungen in Form einer subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilung $\nu_t^{(ij)} \in Prob(\mathbb{R}^{Kj})$ der entscheidungsrelevanten Preise $(p_{t+1}, \cdots, p_{t+j})$. Diese Verteilung wird mit Annahme 3.1

vollständig durch die zugehörigen Momente $\mu_t^{(ij)} \in \mathbb{R}^{Kj}$ und $\Sigma_t^{(ij)} \in \mathcal{M}_{Kj}^{(R)} \subset \mathcal{M}_{Kj}$ beschrieben. Insbesondere wird also die Menge der zulässigen Varianz-Kovarianz-Matrizen aller Investoren auf solche beschränkt, die die Invertierbarkeitsbedingung aus Annahme 3.3 erfüllen. Dies ist mit den Resultaten des vorherigen Abschnittes erforderlich, um sicherzustellen, dass das mehrperiodige Entscheidungsproblem (3.10) zu einer wohldefinierten Nachfragefunktion führt.

Es seien für jeden Investor $(i, j) \in \mathbb{I}$ die Annahmen 3.1 und 3.2 erfüllt und die subjektiven Momente $(\mu_t^{(ij)}, \Sigma_t^{(ij)}) \in \mathbb{R}^{Kj} \times \mathcal{M}_{Kj}^{(R)}$ gegeben. Dann existieren nach Satz 3.1 für $j = 1, \cdots, J$ stetige Abbildungen

$$\Theta^{(j)} : \mathcal{M}_{Kj}^{(R)} \longrightarrow \mathcal{M}_K, \quad \Sigma_t^{(ij)} \longmapsto \Theta^{(j)}\left(\Sigma_t^{(ij)}\right) = \Theta_t^{(ij)} \tag{4.1}$$

und

$$\theta^{(j)} : \mathbb{R}^{Kj} \times \mathcal{M}_{Kj}^{(R)} \longrightarrow \mathbb{R}^K, \quad (\mu_t^{(ij)}, \Sigma_t^{(ij)}) \longmapsto \theta^{(j)}(\mu_t^{(ij)}, \Sigma_t^{(ij)}) = \theta_t^{(ij)}, \tag{4.2}$$

so dass sich die Aktiennachfrage des Investors $(i, j) \in \mathbb{I}$ in Periode t als Funktion seiner Erwartungen sowie der parametrisch gegebenen Preise $p \in \mathbb{R}^K$ schreiben lässt als (vgl. (3.97))

$$\begin{aligned} \varphi^{(ij)}(p, \mu_t^{(ij)}, \Sigma_t^{(ij)}) &= \frac{1}{a^{(i)} R^{j-1}} \left[\Theta^{(j)}\left(\Sigma_t^{(ij)}\right)\right]^{-1} \left(\theta^{(j)}(\mu_t^{(ij)}, \Sigma_t^{(ij)}) - Rp\right) \\ &= \frac{1}{a^{(ij)}} \Theta_t^{(ij)-1} (\theta_t^{(ij)} - Rp). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dabei wird $a^{(ij)} := R^{j-1} a^{(i)} > 0$ gesetzt, wobei $a^{(i)} > 0$ die Risikoaversion der Investoren vom Typ i bezeichnet.

Die explizite Form der Abbildungen $\Theta^{(j)}(\cdot)$ und $\theta^{(j)}(\cdot)$ ergibt sich dabei für $j = 1, \cdots, J$ mit den Gleichungen (3.95) und (3.96). Insbesondere gilt für $j = 1$

$\theta^{(1)}(\mu,\Sigma) = \mu$ und $\Theta^{(1)}(\Sigma) = \Sigma$, so dass die Nachfrage eines einperiodig planenden Investors $(i,1) \in \mathbb{I}$ der herkömmlichen CAPM-Nachfrage entspricht (vgl. Böhm & Chiarella (2000)).

Aus den individuellen Nachfragenfunktionen (4.3) ergibt sich die aggregierte Nachfrage nach Aktien in Periode t als Funktion der Erwartungen aller Investoren sowie der Preise $p \in \mathbb{R}^K$ als

$$\begin{aligned} \Phi(p,(\mu_t^{(ij)},\Sigma_t^{(ij)})_{(i,j)\in\mathbb{I}}) &:= \sum_{(i,j)\in\mathbb{I}} \varphi^{(ij)}(p,\mu_t^{(ij)},\Sigma_t^{(ij)}) \\ &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{I}} \frac{1}{a^{(ij)}} \Theta_t^{(ij)-1}(\theta_t^{(ij)} - Rp). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Es bezeichne der Vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^K_{++}$ analog zu Abschnitt 2.5 wieder den konstanten Gesamtbestand an Aktien im Markt und $\xi_t \in \mathbb{R}^K$ die (stochastische) Nachfrage der Noise-Traders zum Zeitpunkt t. Setzt man[32]

$$\Gamma_t := \left[\sum_{(i,j)\in\mathbb{I}} \frac{1}{a^{(ij)}} \Theta_t^{(ij)-1} \right]^{-1} \tag{4.5}$$

$$\Gamma_t^{(ij)} := \left[\Theta_t^{(ij)} \, \Gamma_t^{-1} \right]^{-1} \tag{4.6}$$

so erhält man aus der Markträumungsbedingung (vgl. Abschnitt 2.5)

$$\Phi(p_t,(\mu_t^{(ij)},\Sigma_t^{(ij)})_{(i,j)\in\mathbb{I}}) - (\bar{x} - \xi_t) \stackrel{!}{=} 0$$

das Preisgesetz im mehrperiodigen CAPM explizit als Abbildung

$$\begin{aligned} S : \Big(\prod_{j=1}^{J} \mathbb{R}^{Kj} \Big)^I \times \Big(\prod_{j=1}^{J} \mathcal{M}_{Kj}^{(R)} \Big)^I \times \mathbb{R}^K \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^K \\ p_t = S\Big((\mu_t^{(ij)},\Sigma_t^{(ij)})_{(i,j)\in\mathbb{I}}, \xi_t \Big) \quad &:= \quad \frac{1}{R} \Big(\sum_{(i,j)\in\mathbb{I}} \frac{1}{a^{(ij)}} \Gamma_t^{(ij)} \theta_t^{(ij)} - \Gamma_t \, (\bar{x} - \xi_t) \Big). \end{aligned} \tag{4.7}$$

[32] Man beachte, dass die Matrizen $\Theta_t^{(ij)}$ und damit auch die Summe ihrer Inversen alle positiv definit sind, sodass Γ_t und damit auch $\Gamma_t^{(ij)}$ wohldefiniert sind.

Die Abbildung S in (4.7) definiert wieder ein *ökonomisches Gesetz* im Sinne von Böhm & Wenzelburger (1999), das die Preise als Funktion der Erwartungen aller Investoren sowie einer exogenen stochastischen Störung bestimmt. Damit ist die Abbildung S vom *Cobweb-Typ*, da sie nur Preiserwartungen, nicht aber die Preise selbst als Argumente enthält. Weiter beziehen sich diese Erwartungen nicht auf die aktuelle, sondern auf die zukünftigen Perioden $t+1, \cdots, t+J$, so dass das Gesetz einen sogenannten *Erwartungslead* (engl.: *expectational lead*) hat.

Man erkennt aus (4.7), dass sich die Unsicherheit in den Preisen zu Beginn einer beliebigen Periode t für gegebene Erwartungen $(\mu_t^{(ij)}, \Sigma_t^{(ij)})_{(i,j)\in\mathbb{I}}$ ausschließlich durch die Stochastik der Nachfrage ξ_t der Noise-Traders ergibt. Für den Fall, dass die Erwartungen und damit auch die Parameter aus (4.1) und (4.2) über die Zeit konstant sind, ergibt sich der Preisprozess $\{p_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ über (4.7) als affin-lineare Transformation des Transaktionsprozesses $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ der Noise-Traders. Die qualitativen Eigenschaften dieses Prozesses übertragen sich in diesem Fall unmittelbar auf den Preisprozess. Falls die Erwartungen allerdings nicht konstant sind, ergibt sich durch die Aufdatierung der subjektiven Erwartungen ein zusätzlicher stochastischer Einfluss, der die Eigenschaften des Preisprozesses beeinflusst.

Aus der sequentiellen Struktur des Modells folgt, dass die Investoren in t ihre Erwartungen zu Beginn der Periode und damit aufbauend auf Beobachtungen von Preisen und Noise-Trader-Transaktionen bis zum Ende der Vorperiode $t-1$ bilden. Bezogen auf die Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ aus Annahme 2.5 bedeutet dies, dass die Erwartungsmomente $(\mu_t^{(ij)}, \Sigma_t^{(ij)})$ und damit auch die über (4.1) und (4.2) definierten Parameter $(\theta_t^{(ij)}, \Theta_t^{(ij)})$ Funktionen von höchstens $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren Zufallsvariablen und damit selbst $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar sind.
Bezeichnet man für jedes $t \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{E}_t[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_t]$ den auf $\mathcal{F}_t$ bedingten Erwartungswert, so erhält man aus Gleichung (4.7) den bedingten Erwartungswert

der Preise p_t als

$$\mathbb{E}_{t-1}\Big[p_t\Big] = \frac{1}{R}\Big(\sum_{(i,j)\in\mathbb{I}} \frac{1}{a^{(ij)}}\Gamma_t^{(ij)}\theta_t^{(ij)} - \Gamma_t\bar{x}\Big) + \frac{1}{R}\Gamma_t\,\mathbb{E}_{t-1}\Big[\xi_t\Big]. \tag{4.8}$$

Weiter ergibt sich aus (4.7) die bedingte Varianz-Kovarianz-Matrix der Preise mit der Symmetrie der Matrix Γ_t aus (4.5) als:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{t-1}\Big[p_t\Big] &:= \mathbb{E}_{t-1}\Big[(p_t - \mathbb{E}_{t-1}[p_t])\,(p_t - \mathbb{E}_{t-1}[p_t])^\top\Big] \\ &= \frac{1}{R^2}\Gamma_t\,\mathbb{V}_{t-1}\,[\xi_t]\,\Gamma_t.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Man erkennt aus (4.9), dass die bedingte Varianz der Preise von der bedingten Varianz der Störung ξ_t und der Matrix Γ_t und damit insbesondere von den subjektiven Varianz-Kovarianz-Matrizen aller Marktteilnehmer bestimmt wird. Der mit (4.8) definierte bedingte Erwartungswert der Preise wird neben der bedingten Erwartung der Störung ξ_t sowohl von den subjektiven Erwartungswerten als auch von den Varianz-Kovarianz-Matrizen der Investoren bestimmt.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Form des Preisgesetzes im mehrperiodigen CAPM eine identische Form aufweist wie im Fall mit einperiodig planenden Investoren und heterogenen Erwartungen (Wenzelburger (2001a)). Dies ist eine unmittelbare Konsequenz des Resultates aus dem vorherigen Kapitel, das besagt, dass unter den gemachten Annahmen die Nachfrage eines mehrperiodig planenden Investors strukturell der eines myopisch handelnden Investors entspricht. Im vorliegenden Fall wird die Heterogenität der Investoren neben möglicherweise unterschiedlichen Erwartungen zusätzlich durch die unterschiedlichen Planungshorizonte der Generationen erzeugt.

Wie bereits in Abschnitt 2.5 gezeigt wurde, wird die Dynamik der Preise entscheidend davon bestimmt, wie die Investoren ihre Erwartungen über die Zeit aufdatieren. Da die subjektive Verteilung $\nu_t^{(ij)} \in Prob(\mathbb{R}^{Kj})$ des Investors $(i,j) \in \mathbb{I}$ zum Zeitpunkt t gemäß Annahme 3.1 aus einer Klasse gewählt wird, die vollständig durch die zugehörigen Momente $(\mu_t^{(ij)}, \Sigma_t^{(ij)}) \in \mathbb{R}^{Kj} \times \mathcal{M}_{Kj}^{(R)}$ beschrieben wird, ist eine Aufdatierung der subjektiven Verteilung im vorliegenden Fall äquivalent zu einer Aufdatierung der Verteilungsmomente.

Analog zu Abschnitt 2.5 wird die Erwartungsbildung zunächst für die junge Generation formalisiert. Betrachtet wird ein junger Investor $(i,J) \in \mathbb{I}$, der zu Beginn einer beliebigen Periode $t \in \mathbb{N}$ die Momente seiner subjektiven Verteilung $(\mu_t^{(iJ)}, \Sigma_t^{(iJ)}) \in \mathbb{R}^{Kj} \times \mathcal{M}_{Kj}^{(R)}$ auf Basis der zur Verfügung stehenden Informationen festlegt. Dabei wird analog zu den Ausführungen in Abschnitt 2.5 unterstellt, dass die Informationsmenge des Investors zum Zeitpunkt t neben vergangenen Preisen p_τ und Noise-Trader-Transaktionen ξ_τ, $\tau < t$, auch die Verteilung $\nu_{t-1}^{(iJ)}$ seines Vorgängers, d.h. des in $t-1$ jungen Investors vom gleichen Typ i, enthält. Insbesondere kennt der Investor zum Zeitpunkt t damit den Erwartungswert $\mu_{t-1}^{(iJ)}$ seines Vorgängers.

Zu Beginn der betrachteten Periode t hat der Investor nun eine weitere Realisation von Preisen p_{t-1} und Noise-Traders-Portefeuilles ξ_{t-1} beobachtet. Eine Prognoseregel für den subjektiven Erwartungswert eines jungen Investors $(i,J) \in \mathbb{I}$ kann somit als Abbildung

$$\begin{aligned} \psi^{(iJ)} : \mathbb{R}^{KJ} \times \mathbb{R}^{K} \times \mathbb{R}^{K} &\longrightarrow \mathbb{R}^{KJ} \\ \psi^{(iJ)}(\mu_{t-1}^{(iJ)}, p_{t-1}, \xi_{t-1}) &= \mu_t^{(iJ)} \end{aligned} \tag{4.10}$$

definiert werden, die den Erwartungswert $\mu_{t-1}^{(iJ)}$ seines Vorgängers in Abhängigkeit von den zusätzlichen Beobachtungen (p_{t-1}, ξ_{t-1}) zu $\mu_t^{(iJ)}$ aufdatiert.

Eine Prognoseregel für zweite Momente, die die subjektive Varianz-Kovarianz-

Matrix $\Sigma_t^{(iJ)}$ aufdatiert, kann im Prinzip analog definiert werden (vgl. Wenzelburger (2001a)). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll sich die Betrachtung jedoch auf die Aufdatierung der Erwartungswerte beschränken. Damit wird die folgende Annahme gemacht:

Annahme 4.1 *Die subjektiven Varianz-Kovarianz-Einschätzungen der jungen Investoren bezüglich der Preise $p_{t+1}, \ldots, p_{t+J}$ sind über die Zeit konstant, d.h. in jeder Periode $t \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\Sigma_t^{(iJ)} = \Sigma^{(iJ)} \in \mathcal{M}_{KJ}^{(R)}, \quad i = 1, \ldots, I. \tag{4.11}$$

Man beachte, dass die Varianz-Kovarianz-Matrix $\Sigma^{(iJ)}$ eines jungen Investors (i, J) weiterhin von seinem Typ i abhängen kann. Insbesondere müssen die Varianz-Kovarianz-Einschätzungen der jungen Investoren also nicht identisch sein.

Gemäß Annahme 2.6 werden die Erwartungen der Investoren in jeder Periode $t \in \mathbb{N}$ vollständig durch die Erwartungen der jeweils jungen Generation und damit durch die Momente $(\mu_t^{(iJ)}, \Sigma^{(iJ)})$, $i = 1, \ldots, I$, beschrieben. Die Verteilung $\nu_t^{(ij)}$ eines nicht-jungen Investors $(i, j) \in \mathbb{I}$, $j < J$, ergibt sich gemäß Annahme 2.6 aus den Erwartungen $\nu_t^{(iJ)}$ des jungen Investors als Bildverteilung unter der Projektionsabbildung $\pi_{1,j} : \mathbb{R}^{KJ} \longrightarrow \mathbb{R}^{Kj}$, die durch die Projektionsmatrix

$$\pi_{1,j} \quad := \quad \begin{bmatrix} I_K & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_K & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_K & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Kj \times KJ}, \quad j = 1, \ldots, J-1 \tag{4.12}$$

definiert wird. Diese Annahme impliziert, dass ein nicht-junger Investor $(i, j) \in \mathbb{I}$, $j < J$, in Periode t eine identische Verteilung der Preise $p_{t+1}, \ldots, p_{t+j}$ unterstellt wie der junge Investor $(i, J) \in \mathbb{I}$ vom gleichen Typ i. Die Momente seiner Verteilung ergeben sich somit aus den Momenten des jungen Investors als

$$\begin{aligned} \mu_t^{(ij)} &= \pi_{1,j}\mu_t^{(iJ)} \\ \Sigma^{(ij)} &= \pi_{1,j}\Sigma^{(iJ)}\pi_{1,j}^\top. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Aus Annahme 4.1 und (4.13) folgt damit, dass die subjektiven Varianz-Kovarianz-Matrizen *aller* Investoren über die Zeit konstant sind. Für die Prognoseregel eines nicht-jungen Investors $(i, j) \in \mathbb{I}$, $j < J$, kann analog zu Abschnitt 2.5 und Gleichung (2.33) unter Verwendung von Gleichung (4.13)

$$\psi^{(ij)} := \pi_{1,j} \circ \psi^{(iJ)}, \quad j = 1, \cdots, J-1 \tag{4.14}$$

gesetzt werden.

Definiert man $\psi := (\psi^{(ij)})_{(i,j)\in\mathbb{I}}$ als die Liste der Prognoseregeln aller Investoren, so erhält man mit (4.7) das folgende zufällige dynamische System (vgl. Böhm & Chiarella (2000), S. 13), das die Entwicklung der Preise und Erwartungen im mehrperiodigen CAPM bei konstanten Varianz-Kovarianz-Matrizen aller Investoren beschreibt:[33]

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (\mu_t^{(ij)})_{(i,j)\in\mathbb{I}} &=& \psi\left((\mu_{t-1}^{(ij)})_{(i,j)\in\mathbb{I}}, p_{t-1}, \xi_{t-1}\right) \\ p_t &=& S\left(\psi\left((\mu_{t-1}^{(ij)})_{(i,j)\in\mathbb{I}}, p_{t-1}, \xi_{t-1}\right), \xi_t\right). \end{array} \right. \tag{4.15}$$

Die Dynamik wird dabei im Wesentlichen wieder durch die Interaktion zwischen den individuell verwendeten Prognoseregeln ψ und dem ökonomischen Preisbildungsgesetz S generiert. Für den Fall, dass die Prognosebildung aller Investor unabhängig von vergangenen Preisen erfolgt, verläuft der Prozess der individuellen Erwartungen unabhängig von dem Preisprozess. Die Preise ergeben sich in

[33] Im Rahmen eines kleinen notationellen Missbrauchs wurde dabei die Liste der subjektiven Varianz-Kovarianz-Matrizen als Argument der Abbildung S vernachlässigt, da diese gemäß Annahme 4.1 über die Zeit konstant sind.

diesem Fall mit Gleichung (4.7) in jeder Periode aus den Erwartungen der Investoren und der Nachfrage ξ_t der Noise-Traders.

Im Gegensatz zu der allgemeinen Form (2.34) entwickeln sich Preise und Erwartungen im vorliegenden Fall unabhängig von den Portefeuille-Allokationen $\zeta_t = (x_t^{(ij)}, y_t^{(ij)})_{(i,j)\in\mathbb{I}}$ unter den Investoren. Dies ergibt sich als unmittelbare Konsequenz aus der Form der individuellen Nachfragen (4.3), die unabhängig von dem jeweiligen Vermögen der Investoren sind.

Das nach dem Handel in Periode t gehaltene Portefeuille des Investors $(i,j) \in \mathbb{I}$ erhält man mit (4.3) nach der Realisation der Preise p_t als:

$$\begin{aligned} x_t^{(ij)} &= \varphi^{(ij)}(p_t, \mu_t^{(ij)}, \Sigma^{(ij)}) \\ y_t^{(ij)} &= \begin{cases} e^{(i)} - p_t^\top x_t^{(ij)} & j = J \\ R y_{t-1}^{(i,j+1)} + p_t^\top (x_{t-1}^{(i,j+1)} - x_t^{(ij)}) & j = 1, \cdots, J-1. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Hierbei bezeichnet $x_t^{(ij)} \in \mathbb{R}^K$ wieder das Aktienportefeuille des Investors und $y_t^{(ij)} \in \mathbb{R}$ seine Investition in die sichere Anlage.

Für die folgenden Betrachtungen soll der Spezialfall *homogener Erwartungen* unterstellt werden. Dies bedeutet, dass die Erwartungen $(\mu_t^{(ij)}, \Sigma^{(ij)})$ eines beliebigen Investors $(i,j) \in \mathbb{I}$ unabhängig von seinem Typ i sind und nur von seiner Lebenserwartung j bestimmt werden. Insbesondere halten damit alle Investoren innerhalb einer Generation identische Erwartungen, so dass die subjektiven Verteilungsmomente im Weiteren nur noch mit dem Generationsindex $j = 1, \ldots, J$ indiziert werden. Da sich die Erwartungen der Investoren in jeder Periode mit (4.13) aus den Erwartungen der jeweils jungen Generation ergeben, ist die folgende Annahme ausreichend:

Annahme 4.2 *In jeder Periode $t \in \mathbb{N}$ halten die Investoren der jungen Generation $j = J$ identische Erwartungen bzgl. der Preise $p_{t+1}, \ldots, p_{t+J}$. Diese werden* *im folgenden für jedes t geschrieben als*

$$\mu_t^{(J)} := \begin{pmatrix} \mu_{t,t+1} \\ \vdots \\ \mu_{t,t+J} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{KJ}, \qquad \Sigma^{(J)} := \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \dots & \Sigma_{1J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{J1} & \dots & \Sigma_{JJ} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{KJ}^{(R)}. \quad (4.17)$$

Mit dieser Notation beschreibt $\mu_{t,t+n} \in \mathbb{R}^K$ den gemeinsamen Erwartungswert der jungen Investoren in Periode t bezüglich der Preise p_{t+n}, $n = 1, \cdots, J$. Weiter definiert $\Sigma_{nm} \in \mathbb{R}^{K \times K}$ ihre (gemäß Annahme 4.1 konstante) Varianz-Kovarianz-Einschätzung zwischen den Preise p_{t+n}, p_{t+m}, $n, m = 1, \cdots, J$.

Mit Gleichung (4.13) ergeben sich die gemeinsamen Erwartungen der Investoren aus Generation $j = 1, \dots, J-1$ für jedes $t \in \mathbb{N}$ aus den Erwartungen (4.17) der jungen Investoren als:

$$\mu_t^{(j)} := \begin{pmatrix} \mu_{t,t+1} \\ \vdots \\ \mu_{t,t+j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{Kj}, \qquad \Sigma^{(j)} := \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \dots & \Sigma_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{j1} & \dots & \Sigma_{jj} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{Kj}^{(R)}. \quad (4.18)$$

Da Annahme 4.2 für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt, folgt mit (4.10) und (4.14) insbesondere, dass alle Mitglieder einer Generation die gleiche Vorhersageregel verwenden, d.h. es gilt $\psi^{(ij)} = \psi^{(j)}$ für alle $i = 1, \cdots, I$.

Gegeben die Annahme homogener Erwartungen und konstanter zweiter Momente gilt für die Parameter aus (4.1) und (4.2), die die Nachfrage des Investors $(i, j) \in \mathbb{I}$ in Periode t definieren:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \Theta_t^{(ij)} & = & \Theta^{(j)} & := & \Theta^{(j)}\left(\Sigma^{(j)}\right) \\ \theta_t^{(ij)} & = & \theta_t^{(j)} & := & \theta^{(j)}\left(\mu_t^{(j)}, \Sigma^{(j)}\right) \end{array}\right., \quad i = 1, \dots, I. \quad (4.19)$$

Die Matrizen $\Theta_t^{(ij)} \in \mathcal{M}_K$ sind somit als Funktionen der konstanten Varianz-Kovarianz-Einschätzungen ebenfalls über die Zeit konstant und identisch für alle

Investoren innerhalb einer Generation $j = 1, \cdots, J$. Weiter ist der Parameter $\theta_t^{(ij)} \in \mathbb{R}^K$ in jeder Periode t identisch für alle Investoren innerhalb einer Generation und wird daher im Folgenden als $\theta_t^{(j)}$ geschrieben.

Aus den Gleichungen (4.5) und (4.6) folgt mit (4.19) für den Fall homogener Erwartungen und konstanter zweiter Momente für jedes $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcll} \Gamma_t & = & \Gamma & := \Big[\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{I}} \frac{1}{a^{(ij)}} \Theta^{(j)-1} \Big]^{-1} \\ \Gamma_t^{(ij)} & = & \Gamma^{(j)} & := \big[\Theta^{(j)}\,\Gamma^{-1}\big]^{-1}, \qquad j = 1, \cdots, J. \end{array} \tag{4.20}$$

Setzt man $\alpha := \left(\frac{1}{a^{(1)}} + \cdots + \frac{1}{a^{(I)}}\right) > 0$ als Summe der inversen individuellen Risikoaversionen, der sogenannten *aggregierten Risikotoleranz*, so vereinfacht sich das Preisgesetz (4.7) für den Fall homogener Erwartungen und konstanter Varianz-Kovarianz-Matrizen zu:

$$\begin{aligned} p_t = S\left((\mu_t^{(j)})_{j=1}^J, \xi_t\right) &:= \frac{1}{R}\Big(\sum_{(i,j)\in\mathbb{I}} \frac{1}{a^{(ij)}} \Gamma^{(j)} \theta_t^{(j)} - \Gamma\,(\bar{x} - \xi_t)\Big) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{R^j} \Gamma^{(j)} \theta_t^{(j)} - \frac{1}{R} \Gamma\,(\bar{x} - \xi_t)\,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Die Abhängigkeit der Preise von den Erwartungswerten $\mu_t^{(j)}$ der Generationen $j = 1, \ldots, J$ ergibt sich dabei ausschliesslich über die Terme $\theta_t^{(j)} = \theta^{(j)}(\mu_t^{(j)}, \Sigma^{(j)})$ aus (4.19).

Mit Gleichung (4.3) folgt, dass für den vorliegenden Fall homogener Erwartungen die Aktiennachfragefunktion zweier Investoren $(i,j), (i',j) \in \mathbb{I}$ unterschiedlichen Typs $i \neq i'$, die der gleichen Generation angehören, sich nur durch möglicherweise unterschiedliche Risikoaversionen unterscheiden kann, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \varphi^{(ij)}(p, \mu_t^{(j)}, \Sigma^{(j)}) &= \frac{1}{a^{(i)} R^{j-1}} \Theta^{(j)-1} (\theta_t^{(j)} - Rp) \\ &= \lambda \varphi^{(i'j)}(p, \mu_t^{(j)}, \Sigma^{(j)}) \end{aligned} \tag{4.22}$$

mit $\lambda := \frac{a^{(i')}}{a^{(i)}} > 0$. Die Annahme homogener Erwartungen impliziert somit im vorliegenden Fall, dass alle Investoren innerhalb einer Generation nach dem Handel in Periode t ein *strukturell identisches* Portefeuille halten, bei dem die Aktien der K Firmen in einem identischen Verhältnis zueinander stehen.

Bezeichnet man unter Verwendung von (4.16) für $j = 1, \cdots, J$ mit

$$\begin{aligned} x_t^{(j)} &:= \sum_{i=1}^{I} \varphi^{(ij)}(p_t, \mu_t^{(j)}, \Sigma^{(j)}) \\ &= \frac{\alpha}{R^{j-1}} \Theta^{(j)-1}(\theta_t^{(j)} - Rp_t) \end{aligned} \tag{4.23}$$

das aggregierte Aktien-Portefeuille, das die Investoren der Generation j nach dem Handel in Periode t halten, so erhält man aus (4.22) das folgende Lemma:

Lemma 4.1 *Es sei die Annahme 4.2 homogener Erwartungen erfüllt. Dann ergibt sich in jeder Periode $t \in \mathbb{N}$ das Aktienportefeuille eines Investors vom Typ i als konstanter Anteil $\lambda^{(i)} := \frac{1}{a^{(i)}\alpha} \in]0, 1[$ am mit (4.23) definierten Portefeuille seiner Generation, d.h.*

$$x_t^{(ij)} = \lambda^{(i)} x_t^{(j)}. \tag{4.24}$$

Dieser Anteil wird durch seine individuelle Risikotoleranz $\alpha^{(i)} := \frac{1}{a^{(i)}}$ relativ zu der aggregierten Risikotoleranz α bestimmt.

Dagegen werden die Nachfragefunktionen (4.3) zweier Investoren vom gleichen Typ, die verschiedenen Generationen angehören, auch im vorliegenden Fall in der Regel strukturell unterschiedliche Portefeuilles induzieren. Die mehrperiodige OLG-Struktur des Modells führt somit trotz homogener Erwartungen zu einer heterogenen Portefeuillestruktur, die allein auf die unterschiedlichen Planungshorizonte der Generationen zurückzuführen ist.

4.2 Homogene Unverzerrte Erwartungen

Im Folgenden wird unter den Annahmen 4.1 und 4.2 konstanter Varianz-Kovarianz-Matrizen und homogener Erwartungen innerhalb der Generationen die Existenz einer Prognoseregel der Form (4.10) untersucht, die *unverzerrte Erwartungen* generiert. Dies bedeutet, dass in jeder Periode die *subjektiven* Erwartungswerte der Investoren über zukünftige Preise mit dem *wahren* bedingten Moment aus (4.8) übereinstimmen, so dass der bedingte Erwartungsfehler gleich Null ist. Bei der folgenden Untersuchung der Existenz und Form einer solchen Prognoseregel wird ausschließlich der Fall $J = 2$ betrachtet, d.h. die Generationen bestehen aus Investoren, die für drei aufeinander folgende Perioden auf dem Markt handeln.

Mit den Ausführungen des vorherigen Abschnittes werden die Erwartungen der Investoren in jeder Periode vollständig durch die Verteilungsmomente der jungen Generation $j = 2$ beschrieben, die sich aus Gleichung (4.17) für jedes $t \in \mathbb{N}$ ergeben als:

$$\mu_t^{(2)} = \begin{pmatrix} \mu_{t,t+1} \\ \mu_{t,t+2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2K}, \qquad \Sigma^{(2)} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2K}^{(R)}. \tag{4.25}$$

Die nicht-junge Generation $j = 1$ unterstellt annahmegemäß eine identische Verteilung bzgl. der Preise p_{t+1} wie die jungen Investoren. Die Erwartungen dieser Investoren ergeben sich mit Gleichung (4.12) und (4.13) für jedes $t \in \mathbb{N}$ als

$$\begin{aligned} \mu_t^{(1)} &= \begin{bmatrix} I_K & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{t,t+1} \\ \mu_{t,t+2} \end{pmatrix} = \mu_{t,t+1} \qquad (4.26) \\ \Sigma^{(1)} &= \begin{bmatrix} I_K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_K \\ 0 \end{bmatrix} = \Sigma_{11}. \end{aligned}$$

Die Erwartungswerte $\mu_t^{(j)} \in \mathbb{R}^{Kj}$, $j = 1, 2$, werden im Weiteren auch als *Prognosen* der Generationen bezeichnet. Für die Ermittlung einer unverzerrten Prognoseregel ist es erforderlich, das Preisgesetz (4.21) explizit als Funktion von $\mu_{t,t+1}$ und $\mu_{t,t+2}$ zu erhalten. Dabei erkennt man aus (4.19) und (4.21), dass die Prognosen ausschließlich über die Terme $\theta_t^{(j)} = \theta^{(j)}(\mu_t^{(j)}, \Sigma^{(j)})$, $j = 1, 2$, in die Preisbildung eingehen. Somit ist es ausreichend, die Form dieser Abbildungen explizit zu beschreiben. Für $j = 1$ gilt dabei, wie oben bereits angesprochen, die Identität bzgl. $\mu_t^{(1)}$, d.h.

$$\theta_t^{(1)} \;=\; \theta^{(1)}(\mu_t^{(1)}, \Sigma^{(1)}) \;:=\; \mu_{t,t+1}. \tag{4.27}$$

Definiert man analog zu den Abschnitten 3.3 und 3.4 die folgenden Parametermatrizen, die sich aus den Einträgen der subjektiven Varianz-Kovarianz-Matrix aus (4.25) sowie der sicheren Rendite R ergeben

$$\begin{array}{rcll} A_1 & := & \left[RI_K - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\right] & \in \mathbb{R}^{K\times K} \\ \Sigma_2 & := & \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{21}^{\top} & \in \mathcal{M}_K \\ C & := & A_1^{\top}\Sigma_2^{-1} & \in \mathbb{R}^{K\times K}, \end{array} \tag{4.28}$$

so erhält man mit Satz 2.1 und Gleichung (3.47) für $j = 2$:

$$\theta_t^{(2)} = \theta^{(2)}(\mu_t^{(2)}, \Sigma^{(2)}) \;:=\; \mu_{t,t+1} + \Theta^{(2)}C(\mu_{t,t+2} - R\mu_{t,t+1}). \tag{4.29}$$

Hierbei ergibt sich die Matrix $\Theta^{(2)} \in \mathcal{M}_K$ gemäß (4.1) ausschließlich aus der Varianz-Kovarianz-Matrix $\Sigma^{(2)}$.[34] Man beobachtet, dass der Parameter $\theta_t^{(2)}$ eine lineare Kombination der Prognosen für $t+1$ und $t+2$ ist und die Matrix C aus (4.28) mit der Annahme $\Sigma^{(2)} \in \mathcal{M}_{2K}^{(R)}$ das Produkt zweier nichtsingulärer Matrizen und damit ebenfalls nichtsingulär ist.

[34] Unter Verwendung der Parameterdefinitionen (4.28) lässt sich zeigen, dass gilt: $\Theta^{(2)} = \Theta^{(2)}(\Sigma^{(2)}) := \left[\Sigma_{11}^{-1} + A_1^{\top}\Sigma_2^{-1}A_1\right]^{-1}$, vgl. dazu (3.46).

Durch Einsetzen von (4.27) und (4.29) in (4.21) erhält man das Preisgesetz im dreiperiodigen CAPM unter homogenen Erwartungen und konstanten Varianz-Kovarianz-Matrizen explizit als Funktion der Prognosen $\mu_{t,t+1}, \mu_{t,t+2}$:

$$\begin{aligned} p_t &= S(\mu_{t,t+1}, \mu_{t,t+2}, \xi_t) \\ &:= \frac{1}{R}\Big(\mu_{t,t+1} + \frac{\alpha}{R}\Gamma C(\mu_{t,t+2} - R\mu_{t,t+1}) - \Gamma(\bar{x} - \xi_t)\Big). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Die Matrix Γ aus (4.20) ergibt sich dabei für den vorliegenden Spezialfall als $\Gamma = \frac{R}{\alpha}\left[R\Theta^{(1)-1} + \Theta^{(2)-1}\right]^{-1}$.

Gegeben das Preisgesetz (4.30) erfordern unverzerrte Erwartungen, dass in jeder Periode $t \in \mathbb{N}$ die Prognose $\mu_{t-1,t}$ aus $t-1$ bzgl. der Preise p_t mit dem wahren bedingten Erwartungswert übereinstimmt, d.h.[35]

$$\begin{aligned} \mu_{t-1,t} &\stackrel{!}{=} \mathbb{E}_{t-1}[p_t] \\ &= \frac{1}{R}\Big(\mu_{t,t+1} + \frac{\alpha}{R}\Gamma C(\mu_{t,t+2} - R\mu_{t,t+1}) - \Gamma(\bar{x} - \mathbb{E}_{t-1}[\xi_t])\Big). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Um eine Vorhersageregel der Form (4.10) zu finden, die die Bedingung (4.31) in jeder Periode $t \in \mathbb{N}$ erfüllt, genügt es wegen (4.14), eine solche für die junge Generation zu formulieren. Dabei soll sich die Betrachtung im Rahmen dieser Arbeit auf die Klasse der *nicht-aufdatierenden* Prognoseregeln beschränken, die sich durch besondere Einfachheit auszeichnet (vgl. Wenzelburger (2001b)). Dies bedeutet, dass die Investoren in jeder Periode t die Prognose $\mu_{t-1,t+1}$ aus der Vorperiode bzgl. der Preise p_{t+1} beibehalten. Für jedes $t \in \mathbb{N}$ gilt somit die folgende *Nicht-Aufdatierungs-Bedingung*:

$$\mu_{t,t+1} = \mu_{t-1,t+1} \quad \forall t \in \mathbb{N}. \tag{4.32}$$

[35] In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, dass die in Periode t gebildeten Erwartungen $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar sind.

Die Idee einer unverzerrten, nicht-aufdatierenden Prognoseregel ist nun, dass in jeder Periode $t \in \mathbb{N}$ die jeweils junge Generation die Prognose $\mu_{t-1,t+1}$ aus der Vorperiode gemäß (4.32) beibehält und ihre neue Vorhersage $\mu_{t,t+2}$ so wählt, dass die Bedingung (4.31) für die alte Prognose $\mu_{t-1,t}$ erfüllt ist. Durch Auflösen von (4.31) nach $\mu_{t,t+2}$ und Ausnutzung der Nicht-Aufdatierungs-Bedingung (4.32) ergibt sich die unverzerrte, nicht-aufdatierende Prognoseregel explizit als

$$\begin{aligned} \mu_{t,t+2} &= \psi^\star(\mu_{t-1,t}, \mu_{t-1,t+1}, \mathbb{E}_{t-1}[\xi_t]) \\ &:= R\mu_{t-1,t+1} + \frac{R}{\alpha} C^{-1}\Big[\bar{x} - \mathbb{E}_{t-1}[\xi_t] - \Gamma^{-1}(\mu_{t-1,t+1} - R\mu_{t-1,t})\Big]. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Man erkennt, dass $\psi^\star$ eine lineare Funktion der vorherigen Prognose $\mu_{t-1}^{(2)}$ sowie der bedingten Erwartung $\mathbb{E}_{t-1}[\xi_t]$ der Noise-Traders-Transaktion ist. Insbesondere ist die unverzerrte Prognoseregel damit unabhängig von vergangenen Preisen. Die Bedingung (4.31) ist somit für alle Perioden $t \in \mathbb{N}$ erfüllt, wenn die jeweils jungen Investoren ihre Prognose gemäß den Gleichungen (4.32) und (4.33) bestimmen, d.h. wenn gilt:

$$\mu_t^{(2)} = (\mu_{t-1,t+1}, \psi^\star(\mu_{t-1,t}, \mu_{t-1,t+1}, \mathbb{E}_{t-1}[\xi_t])) \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Aus (4.33) ergibt sich, dass die Anwendung der unverzerrten Prognoseregel neben der Kenntnis der Prognose $\mu_{t-1}^{(2)}$ aus der Vorperiode sowie der Marktgegebenheiten (Aktienbestand, aggregierte Risikotoleranz) insbesondere erfordert, dass der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}_{t-1}[\xi_t]$ der Noise-Trader-Transaktion bekannt ist. Unter dieser Voraussetzung besitzen die Investoren alle notwendigen Informationen, um im Mittel korrekte Preiserwartungen zu halten.

Da die unverzerrte Prognoseregel (4.33) unabhängig von vergangenen Preisen ist, verläuft die Erwartungsbildung bei unverzerrten Erwartungen unabhängig von der Entwicklung der Preise. Durch Einsetzen von (4.33) in die Preisgleichung

(4.30) und Ausnutzung von (4.32) ergibt sich das Preisgesetz unter unverzerrten Erwartungen als:

$$\begin{aligned} p_t &= S(\mu_{t-1,t+1}, \psi^\star(\mu_{t-1,t}, \mu_{t-1,t+1}, \mathbb{E}_{t-1}[\xi_t])), \xi_t) \\ &= \mu_{t-1,t} + \frac{1}{R}\Gamma\left(\xi_t - \mathbb{E}_{t-1}[\xi_t]\right). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Man erkennt, dass die Preise in jeder Periode t von der Prognose $\mu_{t-1,t}$ aus der Vorperiode sowie einem additiven Störterm, der sich durch die Abweichung der Störung ξ_t von ihrem bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}_{t-1}[\xi_t]$ ergibt, bestimmt werden. Für den Fall, dass die Realisation der Störung mit ihrem bedingten Erwartungswert zusammenfällt, stimmt die Preisprognose mit der tatsächlichen Realisation überein.

Das aggregierte Aktien-Portefeuille $x_t^{(j)}$ der Generationen $j = 1, 2$ nach dem Handel in Periode t ergibt sich im vorliegenden Fall mit (4.16) für die nicht-junge Generation $j = 1$ als

$$\begin{aligned} x_t^{(1)} &:= \sum_{i=1}^{I} \varphi^{(i1)}(\mu_{t,t+1}, p_t) \\ &= \alpha\Theta^{(1)-1}(\mu_{t,t+1} - Rp_t). \end{aligned} \tag{4.35}$$

und für die in t junge Generation $j = 2$ aus der Markträumungsbedingung als

$$\begin{aligned} x_t^{(2)} &:= \sum_{i=1}^{I} \varphi^{(i2)}(\mu_{t,t+1}, \psi^\star\left(\mu_{t-1,t}, \mu_{t,t+1}, \mathbb{E}_{t-1}[\xi_t]\right), p_t) \\ &= \bar{x} - \xi_t - x_t^{(1)}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Aus (4.35) und (4.36) ersieht man, dass die Generationen $j = 1, 2$ auch im vorliegenden Spezialfall homogener, unverzerrter Erwartungen in der Regel strukturell unterschiedliche Portefeuilles halten werden. Diese Heterogenität ist wieder allein auf die unterschiedlichen Planungshorizonte zurückzuführen. Das realisierte Aktienportefeuille $x_t^{(ij)}$ eines einzelnen Investors $(i, j) \in \mathbb{I}$ ergibt sich gemäß Lemma 4.1 als konstanter Anteil $\lambda^{(i)}$ am Portefeuille seiner Generation.

4.3 Dynamik der Preise bei unverzerrten Erwartungen

Mit der unverzerrten, nicht-aufdatierenden Prognoseregel (4.33) und dem Preisbildungsgesetz (4.34) ergibt sich das folgende zufällige dynamische System, das die Entwicklung der Preise und Erwartungen im dreiperiodigen CAPM unter homogenen unverzerrten Erwartungen bei konstanten zweiten Momenten beschreibt:

$$\begin{cases} p_t &= \mu_{t-1,t} + \frac{1}{R}\Gamma\left(\xi_t - \mathbb{E}_{t-1}\left[\xi_t\right]\right) \\ \mu_{t,t+1} &= \mu_{t-1,t+1} \\ \mu_{t,t+2} &= R\mu_{t-1,t+1} + \frac{R}{\alpha}C^{-1}\Big[\bar{x} - \mathbb{E}_{t-1}\left[\xi_t\right] - \Gamma^{-1}(\mu_{t-1,t+1} - R\mu_{t-1,t})\Big]. \end{cases} \tag{4.37}$$

Das System (4.37) liefert eine explizite Beschreibung der Dynamik der Preise p_t und der unverzerrten Prognosen $\mu_t^{(2)} = (\mu_{t,t+1}^\top, \mu_{t,t+2}^\top)^\top$ der jeweils jungen Generation unter dem stochastischen Einfluss der Störungen ξ_t bzw. des bedingten Erwartungswertes $\mathbb{E}_{t-1}\left[\xi_t\right]$. Dabei verläuft die Dynamik des Prognoseprozesses $\{\mu_t^{(2)}\}_{t\in\mathbb{N}}$, wie oben bereits erwähnt, *unabhängig* von der Entwicklung des Preisprozesses $\{p_t\}_{t\in\mathbb{N}}$. Diese Eigenschaft ergibt sich aus der speziellen Form der unverzerrten Prognoseregel (4.33), die unabhängig von vergangenen Preisen ist.

Die qualitativen Eigenschaften des Prognoseprozesses werden insbesondere von dem induzierten Prozess $\{\mathbb{E}_{t-1}\left[\xi_t\right]\}_{t\in\mathbb{N}}$ der bedingten Erwartung der Noise-Trader-Transaktionen bestimmt. Für den Spezialfall, dass der Störprozess $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ einem i.i.d.-Prozess folgt, gilt für den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}_{t-1}\left[\xi_t\right] = \mathbb{E}\left[\xi_t\right] =: \bar{\xi}$ $\forall t \in \mathbb{N}$. In diesem Fall ist der induzierte Prozess der bedingten Erwartungen deterministisch und die Dynamik der Prognosen $\{\mu_t^{(2)}\}_{t\in\mathbb{N}}$ wird durch ein *deterministisches* dynamisches System beschrieben. Im Gegensatz dazu wird der Preisprozess $\{p_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ auch in diesem Fall stochastisch sein, da er der Störung durch den Prozess $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ unterworfen ist.

Um Aussagen treffen zu können, ob das zufällige dynamische System (4.37) langfristig stabil im Sinne der Theorie der zufälligen dynamischen Systeme ist, genügt es, den Prozess $\{\mu_t^{(2)}\}_{t\in\mathbb{N}}$ der Erwartungen der jungen Generation zu betrachten. Definiert man die Koeffizientenmatrizen

$$\begin{aligned} \Lambda^{(0)} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{R}{\alpha}C^{-1}\bar{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2K} \\ \hat{C} &:= \frac{R}{\alpha}\left[\Gamma C\right]^{-1} \in \mathbb{R}^{K\times K} \\ \Lambda^{(1)} &:= \begin{bmatrix} 0 & I_K \\ R\hat{C} & RI_K - \hat{C} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2K\times 2K} \\ \Lambda^{(2)} &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{\alpha}C^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2K\times 2K} \end{aligned} \tag{4.38}$$

und setzt wieder $\mu_t^{(2)} = (\mu_{t,t+1}^\top, \mu_{t,t+2}^\top)^\top$ sowie $\eta_t := (0^\top, \mathbb{E}_{t-1}\left[\xi_t\right]^\top)^\top$, so erhält man den Erwartungsprozess als affin-lineare Differenzengleichung mit additiver Störung der folgenden Form:

$$\mu_t^{(2)} = \Lambda^{(0)} + \Lambda^{(1)}\mu_{t-1}^{(2)} + \Lambda^{(2)}\eta_t. \tag{4.39}$$

Das langfristige Verhalten des Systems (4.39) wird im stabilen Fall durch einen sogenannten *stochastischen Fixpunkt* bestimmt. Dieser wird – falls er existiert – durch einen stationären stochastischen Prozess $\{\mu_t^\star\}_{t\in\mathbb{N}}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ beschrieben und bildet das Analogon zu einem (asymptotisch stabilen) deterministischen Fixpunkt. Globale asymptotische Stabilität des stochastischen Fixpunktes bedeutet, dass für eine beliebige aber feste Realisation des Störprozesses $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ die Pfade des mit (4.39) definierten Prognoseprozesses $\{\mu_t^{(2)}\}_{t\in\mathbb{N}}$ für jeden beliebigen Startwert gegen den Pfad des Fixpunktes konvergieren.[36]

[36] Im Rahmen dieser Diplomarbeit soll auf eine weitergehende formale Darstellung der Theorie der zufälligen dynamischen System verzichtet werden und nur eine intuitive Begründung geliefert werden. Die zugrunde liegende Theorie wird in Arnold (1998) dargestellt, in Böhm & Chiarella (2000) und Wenzelburger (2001a) finden sich zusammenfassende Darstellungen.

Im vorliegenden Fall, bei dem das dynamische System affin-linear und die Störung additiv ist, ist die Stabilität des stochastischen Fixpunktes äquivalent zur dynamischen Stabilität der zugrunde liegenden Differenzengleichung. Die folgende Satz definiert die Voraussetzungen, unter denen diese Bedingung erfüllt ist.[37]

Satz 4.1 *Es sei die Annahme 2.5 bzgl. des Störprozesses* $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *erfüllt und alle Eigenwerte der Koeffizientenmatrix* $\Lambda^{(1)} \in \mathbb{R}^{2K\times 2K}$ *aus (4.38) seien betragsmäßig kleiner als eins, d.h.* $\chi(\lambda) := \det(\Lambda^{(1)} - \lambda I_{2K}) \neq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $|\lambda| \geq 1$. *Dann besitzt der mit Gleichung (4.39) definierte Erwartungsprozess einen stochastischen Fixpunkt* $\{\mu_t^\star\}_{t\in\mathbb{N}}$, *der global asymptotisch stabil ist.*

Beweis: Arnold (1998), Korollar 5.6.6.

Aus der Definition der Matrix $\Lambda^{(1)}$ in (4.38) ersieht man, dass die Stabilität insbesondere durch die Einträge der subjektiven Varianz-Kovarianz-Matrix (4.25) und die sichere Rendite $R > 0$ bestimmt werden. Dieses Resultat schränkt die Klasse der zulässigen Varianz-Kovarianz-Matrizen unter homogenen unverzerrten Erwartungen weiter ein.

Unterstellt man, dass die Stabilitätsbedingung aus Satz (4.1) erfüllt ist, so wird das langfristige Verhalten des Systems (4.37) durch einen stationären stochastischen Prozess mit konstanten unbedingten Momenten beschrieben. Dabei erlaubt es die in Annahme 2.5 geforderte Ergodizität des Störprozesses $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$, die aus den Realisationen der Preise bzw. der Prognosen ermittelten empirischen Momente als Schätzer für die Momente des stochastischen Fixpunktes zu verwenden.

Im folgenden Abschnitt werden numerische Simulationen des Systems (4.37) für den Spezialfall, bei dem ein einziges riskantes Wertpapier existiert, betrachtet. Dabei werden explizite Bedingungen an die Einträge der Varianz-Kovarianz-Matrix (4.25) formuliert, unter denen die Stabilitätsbedingung aus Satz (4.1) erfüllt ist.

[37] Der folgende Satz folgt dem Stabilitätstheorem in Wenzelburger (2001a), Satz 5.1.

4.4 Numerische Simulation

Der folgende Abschnitt präsentiert Ergebnisse einer numerischen Simulation des zufälligen dynamischen Systems (4.37), die mit dem Programmpaket MACRODYN (Böhm (2003)) durchgeführt wurden. Dabei wird ausschließlich der Fall $K = 1$ betrachtet, d.h. es existiert ein einziges riskantes Wertpapier. In diesem Fall ist zu beachten, dass sowohl die Blockmatrix-Einträge der Varianz-Kovarianz-Matrix $\Sigma^{(2)} \in \mathcal{M}_2^{(R)}$ aus (4.25) als auch die mit (4.28) definierten Parameter *Skalare* sind. Um dies kenntlich zu machen, werden im Folgenden Kleinbuchstaben zur Notation verwendet so dass die Varianz-Kovarianz-Matrix aus (4.25) geschrieben wird als

$$\Sigma^{(2)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2, \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} \tag{4.40}$$

und die mit (4.28) definierten Parameter als

$$\begin{aligned} a_1 &= R - \tfrac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}} \\ \sigma_2 &= \sigma_{22} - \tfrac{\sigma_{21}^2}{\sigma_{11}}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Die Matrix $\Lambda^{(1)}$ aus (4.39) ergibt sich in diesem Fall als

$$\Lambda^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ R\hat{c} & R - \hat{c} \end{bmatrix}$$

wobei der Parameter $\hat{c}$ unter Verwendung von (4.41) analog zu (4.38) wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \hat{c} &:= \frac{(1+R)\sigma_2}{R\sigma_{11} - \sigma_{12}} + a_1 \\ &= \frac{(1+R)(\sigma_{22}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2) + (R\sigma_{11} - \sigma_{12})^2)}{(R\sigma_{11} - \sigma_{12})\sigma_{11}} \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix $\Lambda^{(1)}$ erhält man im vorliegenden Fall explizit als $\lambda_1 = R$ und $\lambda_2 = -\hat{c}$. Somit ergibt sich aus Satz 4.1 für den Fall $K = 1$ das folgende Korollar:

Korollar 4.1 *Für $K = 1$ besitzt der mit (4.39) definierte Erwartungsprozess genau dann einen (global) asymptotisch stabilen stochastischen Fixpunkt, falls:*

(1) $R < 1$

(2) $|\hat{c}| = \left| \frac{(1+R)(\sigma_{22}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2) + (R\sigma_{11} - \sigma_{12})^2}{(R\sigma_{11} - \sigma_{12})\sigma_{11}} \right| < 1.$

Die Bedingung (1) in Korollar 4.1 entspricht der Stabilitätsbedingung in Böhm & Chiarella (2000) für den Fall homogener unverzerrter Erwartungen.[38] Aus der Bedingung (2) ersieht man, dass im mehrperiodigen Fall zusätzliche Annahmen an die subjektiven Varianz-Kovarianz-Einschätzungen der Investoren erforderlich sind, um die Stabilität des Systems (4.37) unter homogenen unverzerrten Erwartungen sicherzustellen.

Man erkennt weiter, dass das Vorzeichen von $\hat{c}$ ausschließlich von dem Vorzeichen des Parameters $a_1 = R - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}$ aus (4.41) bestimmt wird. Wegen der Annahme $\Sigma^{(2)} \in \mathcal{M}_2^{(R)}$ gilt $a_1 \neq 0$ und weiter $\hat{c} > 0 \Leftrightarrow a_1 > 0$. Die Bedingung (2) in Korollar 4.1 kann daher geschrieben werden als:

$$\begin{array}{lll} \frac{(1+R)(\sigma_{22}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2) + (R\sigma_{11} - \sigma_{12})^2}{(R\sigma_{11} - \sigma_{12})\sigma_{11}} < 1 & \text{falls} & R > \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} \\ \frac{(1+R)(\sigma_{22}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2) + (R\sigma_{11} - \sigma_{12})^2}{(R\sigma_{11} - \sigma_{12})\sigma_{11}} > -1 & \text{falls} & R < \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}. \end{array} \tag{4.42}$$

Um in den folgenden Simulationen die Stabilität des Systems (4.37) zu gewährleisten, ist es gemäß Korollar 4.1 (1) erforderlich, die sichere Rendite R kleiner als eins zu wählen. Dies erscheint auf den ersten Blick unrealistisch, jedoch ist

[38] Vgl. Böhm & Chiarella (2000), Theorem 3.2

zu beachten, dass es sich hierbei um eine reale Verzinsung handelt. Dennoch erscheinen zu kleine Werte für R unrealistisch, daher wurde für die Simulationen analog zu Böhm & Chiarella (2000) $R = 0.99$ gesetzt.[39]
Um unter dieser Annahme sicherzustellen, dass auch die Bedingung (2) in Korollar 4.1 erfüllt ist, ist es erforderlich, den Parameter σ_{22} klein im Verhältnis zu σ_{11} zu wählen.[40] Für die Einträge der Varianz-Kovarianz-Matrix aus (4.40) wurde daher $\sigma_{11} = 5$, $\sigma_{22} = 1.875$ sowie $\sigma_{12} = 2.5$ gesetzt. Man beachte, dass die Matrix $\Sigma^{(2)}$ unter diesen Annahmen positiv definit ist.

Für den Prozess $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$, der die Portefeuilles der Noise-Traders beschreibt, wurde im Rahmen der Simulationen ein $AR(1)$-Prozess der Form

$$\xi_t \quad = \quad \gamma^{(0)} + \gamma^{(1)}\xi_{t-1} + \gamma^{(2)}\varepsilon_t \tag{4.43}$$

unterstellt. Der Innovationsprozess $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ besteht dabei aus unkorrelierten, standardnormalverteilten Zufallsvariablen, so dass $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$, $\mathbb{V}[\varepsilon_t] = 1$ für alle $t \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon_s] = 0$, $t \neq s$. Die Parameter $\gamma^{(h)}$, $h = 0, 1, 2$ wurden vor dem Hintergrund eines Aktienbestandes $\bar{x} = 100$ so gewählt, dass die Aktienportefeuilles der Noise-Traders positive Werte zwischen 0 und 100 annehmen. Insbesondere wird durch die Annahme $|\gamma^{(1)}| < 1$ sichergestellt, dass durch (4.43) ein stationärer stochastischer Prozess mit konstanten (unbedingten) Momenten definiert wird.
Alle Parameter, die in der Simulation verwendet wurden, sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

[39] Mit Bezug auf die Resultate in Böhm & Wenzelburger (2002) ist zu hoffen, dass die Bedingung $R < 1$ gelockert werden kann, wenn man den Fall heterogener Erwartungen und eine hinreichend große Anzahl von Investoren auf dem Markt zulässt, die keine unverzerrten Erwartungen halten, z.B. sog. Chartisten.

[40] Unter der Annahme konstanter Varianz-Kovarianz-Matrizen erscheint es sicherlich sinnvoll, $\sigma_{22} = \sigma_{11}$ zu setzen, so dass die Investoren eine im Zeitablauf konstante Varianz des Preisprozesses unterstellen. Dies führt im vorliegenden Fall jedoch zur Instabilität des Systems.

Parameter	Wert	Bez. im Programm	Beschreibung
α	50	alpha	Aggr. Risikotoleranz
σ_{11}	5	sigma_11	Varianz p_{t+1}
σ_{22}	1.875	sigma_22	Varianz p_{t+2}
σ_{12}	2.5	sigma_12	Kovarianz p_{t+1}, p_{t+2}
$\gamma^{(0)}$	5	gamma_0	AR-Parameter
$\gamma^{(1)}$	0.9	gamma_1	AR-Parameter
$\gamma^{(2)}$	2.5	gamma_2	AR-Parameter
R	0.99	R	Risikolose Rendite
$\bar{x}$	100	x_all	Anzahl Aktien
p_0	60	p_0	Startwert f. Preis

Die folgende Abbildung 3 zeigt zunächst einen Zeitreihenausschnitt des Störprozesses $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$, der die realisierten Portefeuilles der Noise-Traders beschreibt:

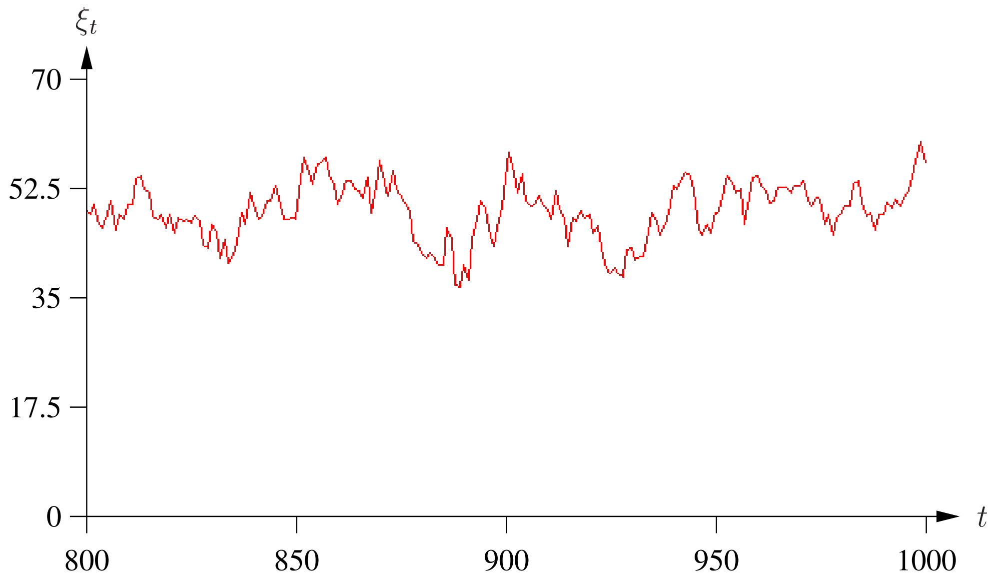

Abbildung 3: Zeitreihenausschnitt der Portefeuilles der Noise-Traders

Gegeben die obige Realisation der Portefeuilles der Noise-Traders illustriert Abbildung 4 das Konzept eines stochastischen Fixpunktes. Dazu werden drei verschiedene Startwerte $\mu_0^1 = 50$, $\mu_0^2 = 60$ und $\mu_0^3 = 70$ des Prognoseprozesses $\{\mu_{t-1,t}\}_{t\in\mathbb{N}}$ betrachtet. Man erkennt, dass unabhängig von den Startbedingungen jeder der drei Zeitreihen $\{\mu^i_{t-1,t}\}_{t\in\mathbb{N}}$, $i = 1, 2, 3$, innerhalb der ersten 500 Iterationen gegen denselben Pfad konvergiert.

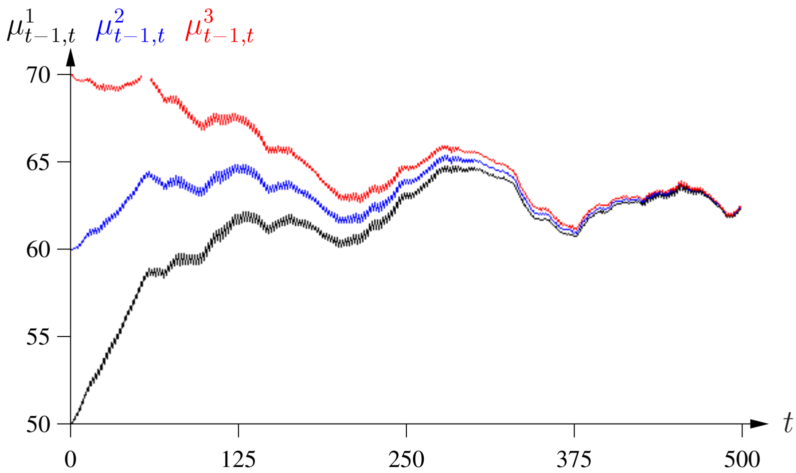

Abbildung 4: Konvergenz der Erwartungen für alternative Startwerte.

Die folgenden Abbildungen 5 und 6 illustrieren die Dynamik des induzierten Preisprozesses. In Abbildung 5 ist ein Zeitreihenausschnitt dargestellt, in Abbildung 6 die zugehörige empirische Häufigkeitsverteilung. Letzterer liegt eine Iterationstiefe von $T = 10^6$ zu Grunde. Die zugehörigen empirischen Momente sind in der Tabelle darunter zusammengefasst.

Man erkennt, dass die Preise für die betrachtete Realisation des Störprozesses strikt positiv sind und Werte in dem Intervall $[60, 70]$ annehmen. Bemerkenswert ist, dass die Volatilität des Preisprozesses über die Zeit nicht konstant zu sein scheint, sondern in manchen Abschnitten ($t \in [800, 840]$, $t \in [920, 1000]$) systematisch größer zu sein scheint als in anderen ($t \in [840, 870]$,$t \in [890, 910]$). Dieses

Phänomen ist interessanterweise auch bei empirischen Finanzmarktzeitreihen zu beobachten und wird als sog. *Volatility Clustering* bezeichnet.

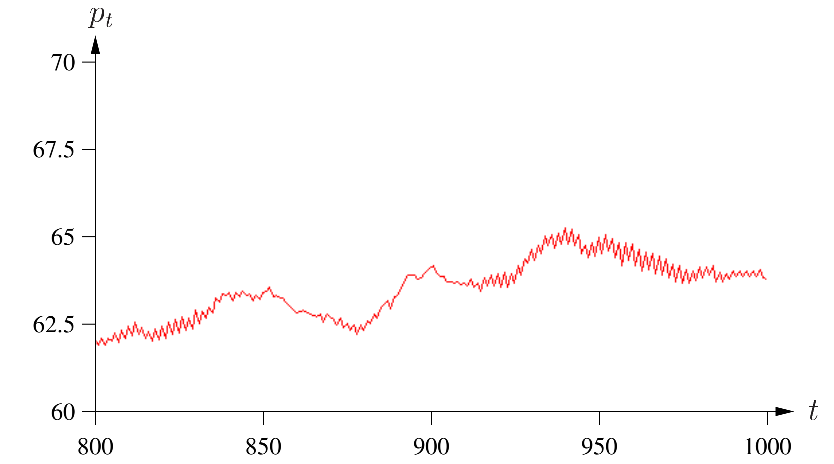

Abbildung 5: Zeitreihenausschnitt des Preisprozesses

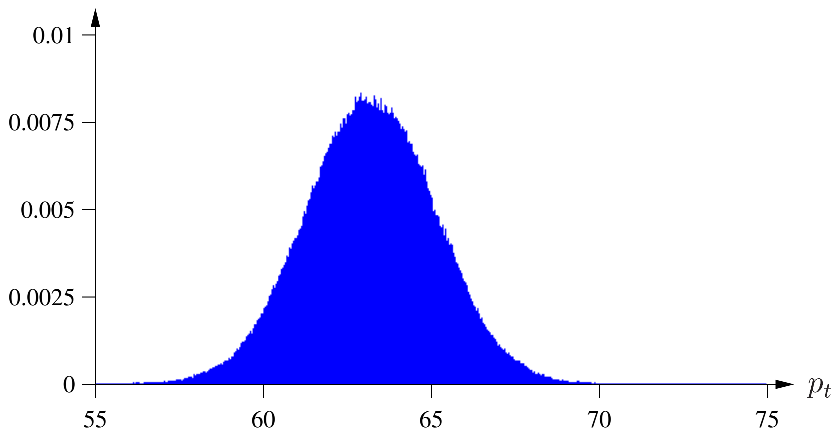

Abbildung 6: Empirische Häufigkeitsverteilung der Preise

Statistik	Schätzung	Statistik	Schätzung
Mittelwert	63.1962	Varianz	3.78956
Std. Abweichung	1.94668	Schiefe	-0.0189265

Die folgenden Abbildungen $7-9$ beschreiben die zeitliche Entwicklung der Portefeuilles der Generationen $j = 1, 2$ und der Noise-Traders. Man erkennt zunächst, dass unterschiedliche Planungshorizonte im vorliegenden Fall tatsächlich die Bildung unterschiedlicher Portefeuilles bewirken. Dabei ist auffällig, dass die nichtjungen Investoren durchgängig weniger Aktien halten als die jungen Investoren. Weiter erkennt man, dass die Schwankungen in den Portefeuilles der Noise-Traders stets durch eine entsprechende Gegenbewegung in den Portefeuilles der jungen Investoren quasi 'aufgefangen' werden. Dabei scheinen die Portefeuilles der jungen Investoren jedoch stärker zu schwanken als die der Noise-Traders. Weiter ist auch hier das Phänomen einer im Zeitablauf variierenden Streuung der Zeitreihen zu beobachten. Dies gilt insbesondere für die Portefeuilles der Generation $j = 1$.

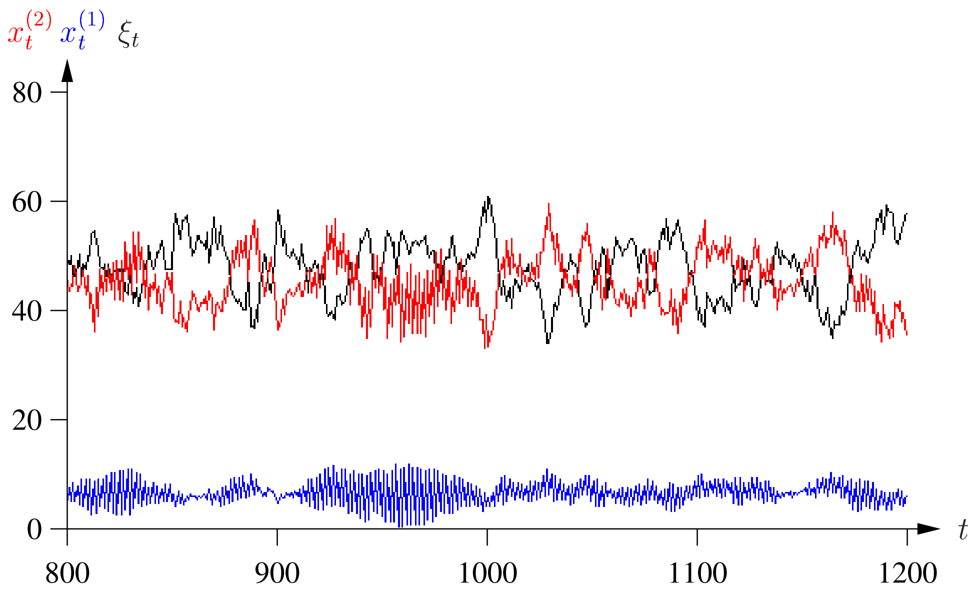

Abbildung 7: Zeitreihenausschnitt der Portefeuilles der Händlergruppen

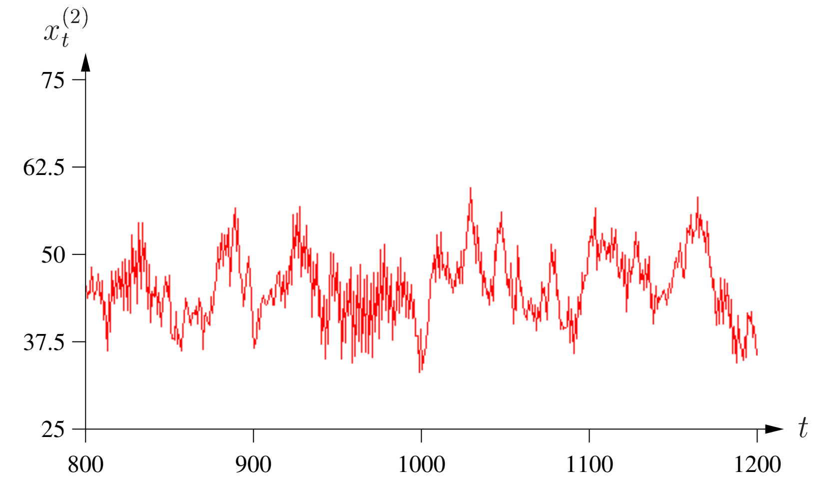

Abbildung 8: Zeitreihenausschnitt der Portefeuilles der jungen Generation

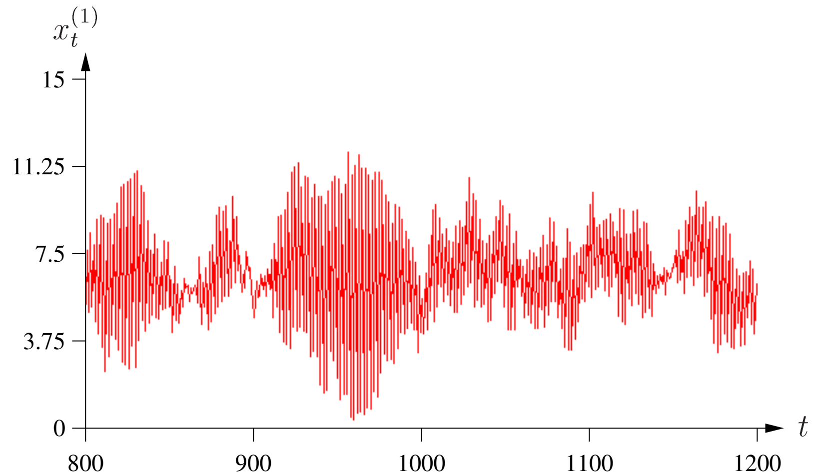

Abbildung 9: Zeitreihenausschnitt der Portefeuilles der nicht-jungen Generation

Da in der Literatur häufig nicht die Aktienpreise direkt, sondern die entsprechenden Renditen betrachtet werden, ist abschließend ein Zeitreihenausschnitt des induzierten Rendite-Prozesses $\{r_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ mit $r_t := \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$ dargestellt. Auch hier ist das Phänomen einer im Zeitablauf schwankenden Volatilität deutlich zu erkennen.

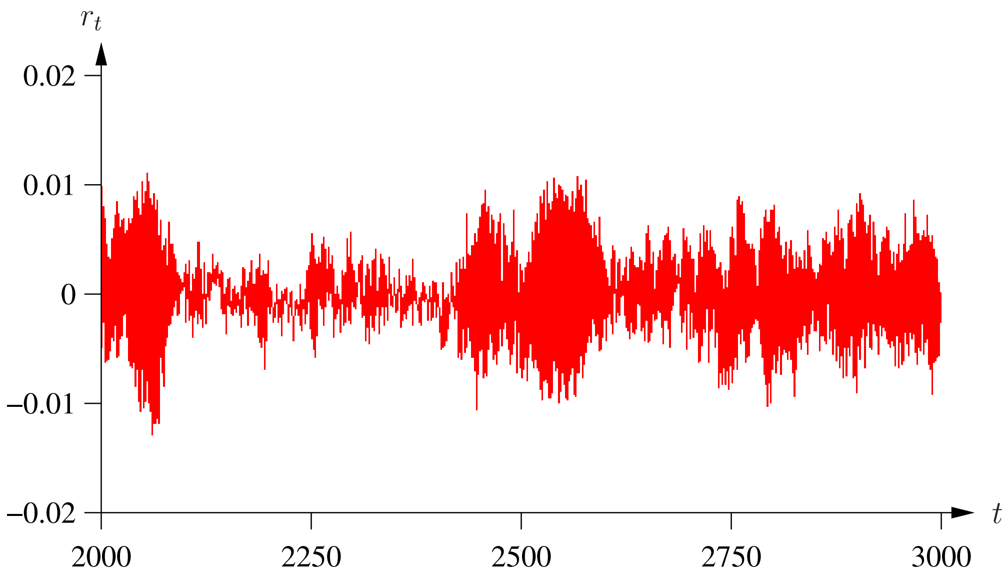

Abbildung 10: Zeitreihenausschnitt des Renditeprozesses

4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Preisbildung und -dynamik unter den Annahmen des mehrperiodigen CAPM untersucht. Es wurde gezeigt, dass die Preisbildung eine identische Struktur aufweist wie im Fall mit einperiodig planenden Investoren und heterogenen Erwartungen (Wenzelburger (2001a)). Weiter ergab sich, dass die unterschiedlichen Planungshorizonte der Generationen auch unter der Annahme homogener Erwartungen zur Bildung strukturell unterschiedlicher Portefeuilles führen. Innerhalb einer Generation hält jeder Investor einen konstanten Anteil am Generationenportefeuille, der durch seine individuelle Risikoeinstellung bestimmt wird. Für das dreiperiodige CAPM wurde weiter eine nicht-aufdatierende Prognoseregel formuliert, die unter homogenen Erwartungen unverzerrte Preisprognosen generiert. Dabei wird die Stabilität der Preise und Prognosen unter homogenen unverzerrten Erwartungen neben der risikolosen Rendite insbesondere von den subjektiven Varianz-Kovarianz-Matrizen der Investoren bestimmt.

5 Schlussbetrachtung

In der vorliegenden Diplomarbeit wurde ein sequentielles Finanzmarktmodell mit einer endlichen Anzahl beliebig heterogener Investoren und einer explizit definierten Preis- und Erwartungsbildung vorgestellt. Die mehrperiodige OLG-Struktur des Modells führt dabei für jeden Marktteilnehmer in jeder Handelsperiode auf ein mehrperiodiges Portefeuilleentscheidungsproblem, dessen Formulierung und Lösung sowohl unter allgemeinen als auch den speziellen Annahmen des CAPM betrachtet wurde. Für beide Fälle wurden Bedingungen an die subjektiven Erwartungen und Präferenzen der Investoren formuliert, unter denen das mehrperiodige Entscheidungsproblem zu einer wohldefinierten Nachfrage nach Wertpapieren in der Entscheidungsperiode führt.
Als bemerkenswertes Resultat ergab sich dabei, dass unter den Annahmen des CAPM die Nachfrage eines mehrperiodig planenden Investors strukturell der eines myopisch handelnden Investors entspricht. Somit kann das Nachfrageverhalten eines Investors mit mehrperiodigem Planungszeitraum innerhalb des hier vorgestellten CAPM-Rahmens immer als Resultat eines myopisch handelnden Investors mit entsprechenden Erwartungen und Präferenzen dargestellt werden.

Aufbauend auf der Lösung des individuellen mehrperiodigen Entscheidungsproblems wurde die Form des ökonomischen Preisbildungsgesetzes untersucht, das in jeder Periode aus den individuellen Nachfragen die markträumenden Preise explizit bestimmt. Als unmittelbare Konsequenz des oben beschrieben Resultates weist die Preisbildung im mehrperiodigen CAPM dabei eine identische Struktur auf wie im Fall mit einperiodig planenden Investoren und heterogenen Erwartungen (Wenzelburger (2001a)). Im mehrperiodigen Fall ergibt sich die Heterogenität dabei – neben möglicherweise unterschiedlichen Erwartungen – zusätzlich durch die unterschiedlichen Planungshorizonte der Investoren. In diesem Zusammenhang wurde gezeigt, dass die Generationen im mehrperiodigen CAPM auch unter der Annahme homogener Erwartungen in der Regel strukturell unterschiedliche Portefeuilles halten werden. Die Annahme einer mehrperiodigen OLG-Bevölkerung induziert somit eine heterogene Portfeuillestruktur, die allein auf die unterschiedlichen Planungshorizonte der Investoren zurückzuführen ist.

In einem letzten Schritt wurde die Dynamik der Preise untersucht, die durch Aufdatierung der subjektiven Erwartungen mittels zeitinvarianter Prognoseregeln entsteht. Es wurde gezeigt, dass die Interaktion der individuell verwendeten Prognoseregeln mit dem ökonomischen Preisbildungsgesetz ein zufälliges dynamisches System im Sinne von Arnold (1998) definiert. Dieses liefert eine explizite Beschreibung der Dynamik der Preise und Erwartungen in dem Modell.
Speziell wurde im Rahmen des dreiperiodigen CAPM die Existenz einer explizit definierten, nicht-aufdatierenden Prognoseregel gezeigt, die bei homogenen Erwartungen aller Marktteilnehmer unverzerrte Preisprognosen generiert. Im stabilen Fall wird das langfristige Verhalten der Preise, Erwartungen und Portefeuilles unter homogenen unverzerrten Erwartungen durch einen stationären stochastischen Prozess, einen sogenannten stochastischen Fixpunkt, beschrieben. Die Stabilität dieses Fixpunktes wird dabei von der risikolosen Rendite und den subjektiven Varianz-Kovarianz-Matrizen der Investoren bestimmt.

Über die Betrachtungen dieser Arbeit hinaus sind Erweiterungen sowohl innerhalb des vorgestellten Modellrahmens als auch darüber hinaus vorstellbar. So ist zunächst daran zu denken, die Untersuchung der Preisbildung und -dynamik im mehrperiodigen CAPM auszuweiten. Diesbezüglich beschränkte sich die Betrachtung im Rahmen dieser Arbeit weitestgehend auf den einfachsten Fall, bei dem alle Generationen homogene, unverzerrte Erwartungen halten. Als zusätzliche Einschränkung wurde bei der numerischen Simulation unterstellt, dass ein einziges riskantes Wertpapier existiert. Hier erscheint es sinnvoll, die Betrachtung auf den Fall mehrerer Aktien und mehr als zwei Entscheidungsperioden zu erweitern. Des Weiteren ist denkbar, auch den Fall heterogener Erwartungen zuzulassen, bei dem nicht alle Investoren unverzerrte Prognosen bilden.

Weiter wäre es interessant, die Auswirkungen unterschiedlich langer Planungszeiträume unter der Fragestellung zu untersuchen, ob ein mehrperiodig planender Investor langfristig höhere Portefeuilleerträge bzw. Renditen erzielt als ein Anleger, der sich in jeder Handelsperiode myopisch verhält.

Langfristig ist daran zu denken, die Markträumungsannahme zu modifizieren und den Preisbildungsmechanismus an in der Praxis vorherrschende Handelsformen anzugleichen. In diesem Zusammenhang kann der Preismechanismus der elektronischen Handelsplattform XETRA als Referenz dienen (vgl. dazu Deutsche Börse AG (2002)). Allerdings ist dabei zu beachten, dass dies eine Neuformulierung des Modells und insbesondere des individuellen Entscheidungsproblems nach sich zieht, da in diesem Fall die Aktien nicht simultan gehandelt werden. Es ist jedoch zu hoffen, dass die in dieser Arbeit erhaltenen Resultate dabei Verwendung finden können.

6 Literatur

Anderson, T.W. (1984): *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley & Sons, New York u.a.

Arnold, L. (1998): *Random Dynamical Systems*, Springer, Berlin u.a.

Bauer, H. (1991): *Wahrscheinlichkeitstheorie* , 4. Auflage, de Gruyter, Berlin.

Bauer, H. (1992): *Maß- u. Integrationstheorie* , 2. Auflage, de Gruyter, Berlin.

Böhm, V. (2003): "MACRODYN, The Handbook", Discussion Paper No. 498, University of Bielefeld.

Böhm, V. & C. Chiarella (2000): "Mean Variance Preferences, Expectations Formation and the Dynamics of Random Asset Prices", Revised Version December 2001, Discussion Paper No. 448, University of Bielefeld, *forthcoming in Mathematical Finance.*

Böhm, V., N. Deutscher & J. Wenzelburger (2000): "Endogenous Random Asset Prices in Overlapping Generations Economies", *Mathematical Finance,* 10(1), 23-38.

Böhm, V. & J. Wenzelburger (1999): "Expectations, Forecasting and Perfect Foresight - A Dynamical Systems Approach", *Macroeconomic Dynamics,* 3(2), 167-186.

Böhm, V. & J. Wenzelburger (2000): "Expectational Leads in Economic Dynamical Systems", Revised Version September 2001, Discussion Paper No. 373, University of Bielefeld, forthcoming.

Böhm, V. & J. Wenzelburger (2002): "On the Performance of Efficient Portfolios", Discussion Paper No. 493, University of Bielefeld.

Deutsche Börse AG (2002): "XETRA, Release 7, Market Model Stock Trading", Frankfurt a.M.

Drèze, J.H. (1975): "Existence of an Exchange Equilibrium under Price Rigidities", *International Economic Review,* 16(2), 301-320.

Gänssler, P. & W. Stute (1977): *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer Verlag, Berlin a.o.

Grandmont, J.-M. (1982): "Temporary General Equilibrium Theory", in *Handbook of Mathematical Economics,* ed. by K. Arrow & M. Intrilligator, North-Holland Publishing Company, Amsterdam a.o.

Grandmont, J.-M. & Hildenbrand, W. (1974): "Stochastic Processes of Temporary Equilibria", *Journal of Mathematical Economics,* 1, S. 247–277, North-Holland Publishing Company, Amsterdam a.o.

Halmos, P. (1974): *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Springer, New York.

Hildenbrand, W. & A. Kirman (1974): *Introduction to Equilibrium Analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam a.o.

Hunter, J. & B. Nachtergaele (2001): *Applied Analysis*, World Scientific, Singapore a.o.

Ingersoll, J. (1987): *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield, Totowa (NJ).

Lintner, J. (1965): "The Valuation of Risky Assets and Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics,* 47, 13-37.

MARKOWITZ, H. (1952): "Portfolio Selection", *Journal of Finance,* 7, 77-91.

MOSSIN, J. (1966): "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica,* 34, 268-290.

OULLETTE, D.V. (1981): "Schur Complements and Statistics", *Linear Algebra and its Applications*, 36, p. 187 – 295.

PLISKA, S.R. (1999): *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell Publishers, Massachusetts.

SHARPE, W. F. (1964): "Capital Asset Pricing: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, 19, 425 – 442.

STAPLETON, R. & M.G. SUBRAHMANYAM (1978): "A Multiperiod Equilibrium Asset Pricing Model", *Econometrica*, 46 (5), 1077 – 1096.

STOKEY, N. & R. LUCAS (1994): *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts [a.o.].

TOBIN, J. (1958): "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", *Review of Economic Studies* , 25, 65-86.

TONG, Y.L. (1990): *The Multivariate Normal Distribution*, Springer Verlag, New York [a.o.].

TONN, A. (2001): "Zur Dynamik von Aktienportefeuilles bei heterogenen Erwartungen", Diplomarbeit, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Universität Bielefeld.

WENZELBURGER, J. (2001A) "Learning To Predict Rationally When Beliefs Are Heterogenous", Discussion Paper No. 447, University of Bielefeld.

WENZELBURGER, J. (2001B) "Learning in Linear Models with Expectational Leads", Discussion Paper No. 478, University of Bielefeld.

A Anhang 1

A.1 Beweis von Lemma 2.1

Für jedes $k \in \{1, \dots, j\}$ bezeichne $\pi_k : \prod_{t=1}^{j} \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ die k-te Projektionsabbildung definiert als $\pi_k(s_1, \dots, s_k, \dots, s_j) = s_k$. Weiter wird mit $\pi_{1,k} : \prod_{t=1}^{j} \mathcal{S} \longrightarrow \prod_{t=1}^{k} \mathcal{S}$, $\pi_{1,k}(s_1, \dots, s_k, \dots, s_j) = (s_1, \dots, s_k)$ die Projektion des Produktraumes $\mathcal{S}^j = \prod_{t=1}^{j} \mathcal{S}$ auf seine ersten k Komponenten bezeichnet.

Im Rahmen des Beweises wird das folgende Faktorisierungslemma verwendet (zum Beweis s. Gänssler & Stute (1977), S.198, Satz 5.3.21 und Arnold (1998), Satz 1.4.3):

Lemma A.1 *Es sei $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ ein messbarer Raum und es sei $(\Omega_2, \mathcal{B}(\Omega_2))$ ein polnischer Raum ausgestattet mit der Borel'schen σ-Algebra. Dann existiert ein Übergangskern $Q^{(2)} : \Omega_1 \times \mathcal{B}(\Omega_2) \longrightarrow [0,1]$ so dass sich jedes W.-Maß $\mathbb{P}$ auf dem Produktraum $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}(\Omega_2))$ für jedes $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}(\Omega_2)$ schreiben lässt als:*

$$\mathbb{P}(A) = (\mathbb{P}_1 \times Q^{(2)})(A) := \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} 1_A(\omega_1, \omega_2) Q^{(2)}(\omega_1, d\omega_2) \mathbb{P}_1(d\omega_1). \qquad \text{(A.1)}$$

Dabei wird das Maß $\mathbb{P}_1$ auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ von der Projektionsabbildung $\pi_1 : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \Omega_1$, $\pi_1(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$ induziert. Die Zerlegung ist $\mathbb{P}$-fast sicher eindeutig.

Um diesen Satz anwenden zu können, zeigt man zunächst, dass der Signalraum $\mathcal{S} = \mathcal{P} \times \mathcal{D}$ ein polnischer Raum ist. Der euklidische Raum $\mathbb{R}^{K+1}$ ist nach Bauer (1992), S. 179, Beispiel 1, stets polnisch, somit sind $\mathcal{P} = \mathbb{R}_{++}^{K+1} \subset \mathbb{R}^{K+1}$

und $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^{K+1} \subset \mathbb{R}^{K+1}$ als offene (Bauer (1992), S.179, Beispiel 2) bzw. abgeschlossene (Bauer (1992), S.179, Beispiel 3) Unterräume eines polnischen Raumes ebenfalls polnisch und damit auch ihr Produkt $\mathcal{S} = \mathcal{P} \times \mathcal{D}$ (Bauer (1992), S.179, Beispiel 4). Die Vorraussetzungen des Satzes sind somit für den Signalraum $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ erfüllt.

Setzt man in einem ersten Schritt $\Omega_1 = \prod_{t=1}^{j-1} \mathcal{S}$, $\Omega_2 = \mathcal{S}$, so erhält man mit Lemma A.1 eine Faktorisierung der Form $\nu = \nu^{(j-1)} \times Q^{(j)}$ wobei die Randverteilung $\nu^{(j-1)}$ auf $(\mathcal{S}^{j-1}, \mathcal{B}(\mathcal{S}^{j-1}))$ durch die Projektion $\pi_{1,j-1} : \prod_{t=1}^{j} \mathcal{S} \longrightarrow \prod_{t=1}^{j-1} \mathcal{S}$ induziert wird. Für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^j)$ gilt somit die Zerlegung

$$\begin{aligned} \nu(B) &= (\nu^{(j-1)} \times Q^{(j)})(B) \\ &:= \int_{\mathcal{S}^{j-1}} \int_{\mathcal{S}} 1_B(s_1^{j-1}, s_j) Q^{(j)}(s_1^{j-1}, ds_j) \nu^{(j-1)}(ds_1^{j-1}). \end{aligned}$$

Setzt man in einem weiteren Schritt $\Omega_1 = \prod_{t=1}^{j-2} \mathcal{S}$, $\Omega_2 = \mathcal{S}$ und zerlegt das Maß $\nu^{(j-1)}$ unter erneuter Anwendung von Lemma A.1 in $\nu^{(j-2)} \times Q^{(j-1)}$, und verfährt analog mit $\nu^{(j-2)}$, usw., so erhält man schließlich mit $Q^{(1)} \equiv \nu^{(1)}$ die gewünschte Faktorisierung $\nu = Q^{(1)} \times Q^{(2)} \times \cdots \times Q^{(j)}$. Dabei wird die (Rand)-Verteilung $Q^{(1)}$ bezüglich s_1 durch die Projektionsabbildung π_1 definiert, d.h. für jede messbare Menge $B \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ gilt: $Q^{(1)}(B) := \nu(\pi_1^{-1}(B))$. ■

A.2 Beweis von Lemma 2.2

Betrachte die Funktion $h := f - g$. Offenbar gilt $h \geq 0$ für alle $x \in X$ und $\mu(\{h > 0\}) > 0$. Aufgrund der Definition des Integrals gilt $\int_X h d\mu \geq 0$. Angenommen es gelte $\int_X h d\mu = 0$. Dies ist nach Bauer (1992), S.81, Satz 13.2, *äquivalent* zu $\mu(\{h > 0\}) = 0$, was einen Widerspruch darstellt. Somit gilt $\int_X h d\mu > 0$ und mit der Linearität des Integrals $\int_X f d\mu > \int_X g d\mu$. ■

A.3 Beweis von Lemma 3.1

(1) Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion in zwei Schritten: Im ersten Schritt wird die Aussage für $m = 2$ bewiesen. Im zweiten Schritt wird der Induktionsübergang $m - 1 \longrightarrow m$ gezeigt.

Für $m = 2$ gilt mit der Definition aus Gleichung (3.5):

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{2} g(x; c^{(i)}, \vartheta^{(i)}, \Omega^{(i)}) &= \prod_{i=1}^{2} c^{(i)} \exp\Big\{-\frac{1}{2}(x-\vartheta^{(i)})^\top \Omega^{(i)-1}(x-\vartheta^{(i)})\Big\} \qquad (A.2)\\ &= c^{(1)}c^{(2)} \exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(x-\vartheta^{(i)})^\top \Omega^{(i)-1}(x-\vartheta^{(i)})\Big\}.\end{aligned}$$

Unter Beachtung der Symmetrie der Matrizen $\Omega^{(i)} \in \mathcal{M}_K$, $i = 1, 2$ und der damit verbundenen Eigenschaft $x^\top \Omega^{(i)-1}\vartheta^{(i)} = \vartheta^{(i)\top}\Omega^{(i)-1}x$ des Skalarproduktes kann die Summe im Exponenten umgeschrieben werden zu:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}(x-\vartheta^{(i)})^\top \Omega^{(i)-1}(x-\vartheta^{(i)})\\ =\ & \sum_{i=1}^{2}\left(x^\top\Omega^{(i)-1}x - 2x^\top\Omega^{(i)-1}\vartheta^{(i)} + \vartheta^{(i)\top}\Omega^{(i)-1}\vartheta^{(i)}\right)\\ =\ & x^\top\left[\Omega^{(1)-1}+\Omega^{(2)-1}\right]x - 2x^\top\left[\Omega^{(1)-1}\vartheta^{(1)}+\Omega^{(2)-1}\vartheta^{(2)}\right]\\ &\qquad + \vartheta^{(1)\top}\Omega^{(1)-1}\vartheta^{(1)} + \vartheta^{(2)\top}\Omega^{(2)-1}\vartheta^{(2)}.\end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned}\Omega &:= \left[\Omega^{(1)-1}+\Omega^{(2)-1}\right]^{-1}\\ \vartheta &:= \Omega\left[\Omega^{(1)-1}\vartheta^{(1)}+\Omega^{(2)-1}\vartheta^{(2)}\right]\\ c &:= \frac{\prod_{i=1}^{2} g(0; c^{(i)}, \vartheta^{(i)}, \Omega^{(i)})}{g(0; \vartheta, \Omega)},\end{aligned}$$

so gilt weiter

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{2}(x-\vartheta^{(i)})^\top\Omega^{(i)-1}(x-\vartheta^{(i)}) \\
= \;& x^\top\Omega^{-1}x - 2x^\top\Omega^{-1}\vartheta + \vartheta^{(1)\top}\Omega^{(1)-1}\vartheta^{(1)} + \vartheta^{(2)\top}\Omega^{(2)-1}\vartheta^{(2)} \pm \vartheta^\top\Omega^{-1}\vartheta \\
= \;& (x-\vartheta)^\top\Omega^{-1}(x-\vartheta) + \vartheta^{(1)\top}\Omega^{(1)-1}\vartheta^{(1)} + \vartheta^{(2)\top}\Omega^{(2)-1}\vartheta^{(2)} - \vartheta^\top\Omega^{-1}\vartheta.
\end{aligned}
$$

Einsetzen dieser Beziehung in (A.2) liefert:

$$
\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{2} g(x;c^{(i)},\vartheta^{(i)},\Omega^{(i)}) \\
= \;& c^{(1)}c^{(2)}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big((x-\vartheta)^\top\Omega^{-1}(x-\vartheta) - \vartheta^\top\Omega^{-1}\vartheta \\
& \qquad + \vartheta^{(1)\top}\Omega^{(1)-1}\vartheta^{(1)} + \vartheta^{(2)\top}\Omega^{(2)-1}\vartheta^{(2)}\Big)\Big\} \\
= \;& \frac{\prod_{i=1}^{2} c^{(i)}\exp\{-\frac{1}{2}\vartheta^{(i)\top}\Omega^{(i)-1}\vartheta^{(i)}\}}{\exp\{-\frac{1}{2}\vartheta^\top\Omega^{-1}\vartheta\}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}(x-\vartheta)^\top\Omega^{-1}(x-\vartheta)\Big\} \\
= \;& \frac{\prod_{i=1}^{2} g(0;c^{(i)},\vartheta^{(i)},\Omega^{(i)})}{g(0;\vartheta,\Omega}\exp\Big\{-\frac{1}{2}(x-\vartheta)^\top\Omega^{-1}(x-\vartheta)\Big\} \\
= \;& c\exp\Big\{-\frac{1}{2}(x-\vartheta)^\top\Omega^{-1}(x-\vartheta)\Big\} \\
= \;& g(x;c,\vartheta,\Omega),
\end{aligned}
$$

so dass die Behauptung mindestens für $m=2$ erfüllt ist.

In einem zweiten Schritt zeigt man die Behauptung für beliebiges m unter der Annahme, dass die Aussage für $m-1$ gilt. Man erhält unter der Induktionsannahme:

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{m} g(x;c^{(i)},\vartheta^{(i)},\Omega^{(i)}) &= g(x;c^{(m)},\vartheta^{(m)},\Omega^{(m)})\prod_{i=1}^{m-1} g(x;c^{(i)},\vartheta^{(i)},\Omega^{(i)}) \\
&= g(x;c^{(m)},\vartheta^{(m)},\Omega^{(m)})\, g(x;\hat{c},\hat{\vartheta},\hat{\Omega}) \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}
$$

mit

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega} &:= \left[\Omega^{(1)-1} + \cdots + \Omega^{(m-1)-1}\right]^{-1} \\
\hat{\vartheta} &:= \hat{\Omega}\left[\Omega^{(1)-1}\vartheta^{(1)} + \cdots + \Omega^{(m-1)-1}\vartheta^{(m-1)}\right] \\
\hat{c} &:= \frac{\prod_{i=1}^{m-1} g(0; c^{(i)}, \vartheta^{(i)}, \Omega^{(i)})}{g(0; \hat{\vartheta}, \hat{\Omega})}.
\end{aligned}$$

Nach Schritt 1 gilt für das Produkt der beiden Gauss'schen Funktionen in (A.3):

$$g(x; c^{(m)}, \vartheta^{(m)}, \Omega^{(m)})\; g(x; \hat{c}, \hat{\vartheta}, \hat{\Omega}) = g(x; c, \vartheta, \Omega), \tag{A.4}$$

wobei sich die Parameter (c, ϑ, Ω) ergeben als

$$\begin{aligned}
\Omega &:= \left[\hat{\Omega}^{-1} + \Omega^{(m)-1}\right]^{-1} \\
&= \left[\Omega^{(1)-1} + \cdots + \Omega^{(m-1)-1} + \Omega^{(m)-1}\right]^{-1} \\
\vartheta &:= \Omega\left[\hat{\Omega}^{-1}\hat{\vartheta} + \Omega^{(m)-1}\vartheta^{(m)}\right] \\
&= \Omega\left[\Omega^{(1)-1}\vartheta^{(1)} + \cdots + \Omega^{(m-1)-1}\vartheta^{(m-1)} + \Omega^{(m)-1}\vartheta^{(m)}\right] \\
c &:= \frac{g(0; c^{(m)}, \vartheta^{(m)}, \Omega^{(m)})\; g(0; \hat{c}, \hat{\vartheta}, \hat{\Omega})}{g(0; \vartheta, \Omega)} \\
&= \frac{g(0; c^{(m)}, \vartheta^{(m)}, \Omega^{(m)})\; \prod_{i=1}^{m-1} g(0; c^{(i)}, \vartheta^{(i)}, \Omega^{(i)})}{g(0; \vartheta, \Omega)} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{m} g(0; c^{(i)}, \vartheta^{(i)}, \Omega^{(i)})}{g(0; \vartheta, \Omega)}.
\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung (1).

(2) Das Integral einer Gauss'schen Dichtefunktion $f(x; \vartheta, \Omega)$ über $\mathbb{R}^K$ ist auf eins normiert (siehe Anderson (1984)), d.h. es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^K} f(x; \vartheta, \Omega)\, dx \;=\; 1.$$

Mit dieser Eigenschaft und Gleichung (3.6) folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^K} g(x; c, \vartheta, \Omega)\, dx &= \frac{c}{c(\Omega)} \int_{\mathbb{R}^K} g(x; c(\Omega), \vartheta, \Omega)\, dx \\
&= \frac{c}{c(\Omega)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^K} f(x; \vartheta, \Omega)\, dx}_{=1} \\
&= \frac{c}{c(\Omega)}.
\end{aligned}$$

(3) Die ersten beiden Eigenschaften $(E1)$ und $(E2)$ ergeben sich unmittelbar aus der Definition (3.5) einer Gauss'schen Funktion. Um die Eigenschaft $(E3)$ zu zeigen, genügt es, den Exponenten zu betrachten. Es gilt unter Ausnutzung der Eigenschaften $(Ax)^\top = x^\top A^\top$ und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ für $x \in \mathbb{R}^K$ und invertierbare $A, B \in \mathbb{R}^{K \times K}$:

$$\begin{aligned}
(Ax - \vartheta)^\top \Omega^{-1} (Ax - \vartheta) &= \left(A(x - A^{-1}\vartheta)\right)^\top \Omega^{-1} \left(A(x - A^{-1}\vartheta)\right) \\
&= \left(x - A^{-1}\vartheta\right)^\top A^\top \Omega^{-1} A \left(x - A^{-1}\vartheta\right) \\
&= \left(x - A^{-1}\vartheta\right)^\top \left(A^{-1}\Omega A^{-\top}\right)^{-1} \left(x - A^{-1}\vartheta\right).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt damit unmittelbar durch Einsetzen in (3.5). ∎

A.4 Beweis von Lemma 3.2

(1) Der Preisraum $\mathbb{R}^K$ ausgestattet mit der Borel'schen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^K)$ besitzt nach Bauer (1992), S.179, Beispiel 1, die Eigenschaften eines polnischen Raumes. Die Existenz einer Faktorisierung der Form (3.13) folgt damit analog zu dem Beweis von Lemma 2.1 aus dem Faktorisierungslemma A.1.

(2),(3) Um die spezielle Form der bedingten Verteilung $Q^{(2)}(p_1, \cdot)$ und der Randverteilung $Q^{(1)}$ zu zeigen, wird das folgende Lemma verwendet (zum Beweis siehe Tong (1990), S.35, Theorem 3.3.4. und Anderson (1984), S.37, Theorem 2.5.1 und Theorem 2.4.3):

Lemma A.2 *Für $n \geq 2$ und $1 \leq m < n$ sei $X = (X_1, X_2)$ eine nicht-singulär normalverteilte Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ und zugehörigen, entsprechend partitionierten Momenten*

$$\mu := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \Sigma := \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n.$$

Dann lässt sich die mittels Gleichung (3.4) definierte gemeinsame Dichtefunktion $f_n(x; \mu, \Sigma)$ wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned} f_n(x; \mu, \Sigma) &= \underbrace{f_{n-m}(x_2; \mu_{2|1}, \Sigma_2)}_{\textit{Bedingte Dichte}} \underbrace{f_m(x_1; \mu_1, \Sigma_{11})}_{\textit{Randdichte}} \\ \textit{wobei} \quad \mu_{2|1} &:= \mu_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(x_1 - \mu_1) \\ \Sigma_2 &:= \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \end{aligned}$$

Die bedingte Dichtefunktion $f_{n-m}(x_2; \mu_{2|1}, \Sigma_2)$ definiert die bedingte Verteilung der Zufallsvariablen X_2 gegeben eine Realisation $X_1 = x_1$ als Normalverteilung auf $\mathbb{R}^{n-m}$ mit Momenten $(\mu_{2|1}, \Sigma_2)$.
Die Randdichte $f_m(x_1; \mu_1, \Sigma_{11})$ definiert die Randverteilung der Zufallsvariablen X_1 als Normalverteilung auf $\mathbb{R}^m$ mit Momenten (μ_1, Σ_{11}).

Aus der gemeinsamen Normalverteilung $\nu \in Prob(\mathbb{R}^{2K})$ der Zufallsvariablen (p_1, p_2) ergibt sich mit Lemma A.2(1) (wobei $X_1 = p_1$ und $X_2 = p_2$ gesetzt wird) die bedingte Verteilung $Q^{(2)}(p_1, \cdot)$ der Zufallsvariablen p_2 unter Verwendung der Parameter (3.12) als Normalverteilung auf $\mathbb{R}^K$ mit bedingten Momenten

$$\begin{aligned} \mu_{2|1} &:= \mu_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(p_1 - \mu_1) \\ &= \beta_2 + B_2 p_1 \\ \Sigma_2 &:= \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \\ &= \Sigma_{22} - B_2\Sigma_{12}. \end{aligned}$$

Weiter erhält man die Randverteilung $Q^{(1)}$ der Zufallsvariablen p_1 als Normalverteilung auf $\mathbb{R}^K$ mit Momenten (μ_1, Σ_{11}) und damit die Behauptung.

■

A.5 Beweis von Lemma 3.6

(1) Die Existenz einer Faktorisierung der Form (3.2) folgt unmittelbar mit den Induktionsschritten aus dem Beweis von Lemma 2.1 und den Überlegungen aus dem Beweis von Lemma 3.2 (1).

(2),(3) Um die spezielle Form der bedingten Verteilungen $Q^{(t)}(p_1^{t-1}, \cdot)$ für jedes $t = 2, \cdots, j$ zu zeigen, wird die gemeinsame Normalverteilung ν der Zusfallsvariablen $p_1, \cdots, p_j$ in $j-1$ Schritten unter wiederholter Anwendung von Lemma A.2 faktorisiert.

In einem ersten Schritt zerlegt man die gemeinsame Verteilung ν in eine bedingte Verteilung $Q^{(j)}(p_1^{j-1}, \cdot)$ der Zufallsvariablen p_j und eine gemeinsame Randverteilung der Zufallsvariablen $p_1, \cdots, p_{j-1}$. Dazu setzt man

$S_j := [\Sigma_{j,1} \cdots \Sigma_{j,j-1}]$ und partitioniert die Momente $(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^{Kj} \times \mathcal{M}_{Kj}$ der gemeinsamen Verteilung aus (3.9) wie folgt:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{j-1} & S_j^\top \\ S_j & \Sigma_{jj} \end{bmatrix}, \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1^{j-1} \\ \mu_j \end{pmatrix}.$$

Unter Anwendung von Lemma A.2 (wobei $X_1 = p_1^{j-1}$ und $X_2 = p_j$) erhält man die bedingte Verteilung $Q^{(j)}(p_1^{j-1}, \cdot)$ der Zufallsvariablen p_j als Normalverteilung auf $\mathbb{R}^K$ mit bedingten Momenten $(\mu_{j|j-1}, \Sigma_j)$, die sich unter Verwendung der mit (3.50) definierten Parameter ergeben als:

$$\begin{aligned} \mu_{j|j-1} &:= \mu_j + S_j \left[\Sigma_1^{j-1}\right]^{-1} (p_1^{j-1} - \mu_1^{j-1}) \\ &= \beta_j - B_j p_1^{j-1} \\ \Sigma_j &:= \Sigma_{jj} - S_j \left[\Sigma_1^{j-1}\right]^{-1} S_j^\top. \end{aligned}$$

Die Behauptung (2) ist somit für $t = j$ erfüllt. Weiter erhält man aus dem ersten Schritt die Randverteilung der Zufallsvariablen $p_1, \cdots, p_{j-1}$ als Normalverteilung auf $\mathbb{R}^{K(j-1)}$ mit Momenten $(\mu_1^{j-1}, \Sigma_1^{j-1})$. Diese wird nun in einem zweiten Schritt unter erneuter Anwendung von Lemma A.2 in eine bedingte Verteilung $Q^{(j-1)}(p_1^{j-2}, \cdot)$ der Zufallsvariablen p_{j-1} und eine gemeinsame Randverteilung der Zufallsvariablen $p_1, \ldots, p_{j-2}$ zerlegt, usw.
Als Resultat des ersten Schrittes ergibt sich bereits induktiv, dass für beliebiges $t = 1, \cdots, j-1$ die gemeinsame Randverteilung der Zufallsvariablen $p_1, \cdots, p_t$ gegeben ist durch eine Normalverteilung auf $\mathbb{R}^{Kt}$ mit Momenten $(\mu_1^t, \Sigma_1^t) \in \mathbb{R}^{Kt} \times \mathcal{M}_{Kt}$.
Um die Behauptung (2) durch vollständige Induktion zu zeigen, ermittelt man für beliebiges $t = 2, \ldots, j-1$ aus der gemeinsamen Randverteilung der Preise $p_1, \ldots, p_t$ die bedingte Verteilung $Q^{(t)}(p_1^{t-1}, \cdot)$ der Zufallsvariablen p_t.

Dazu setzt man wieder $S_t := [\Sigma_{t,1} \cdots \Sigma_{t,t-1}]$ und partitioniert die Momente (μ_1^t, Σ_1^t) der Randverteilung wie folgt:

$$\Sigma_1^t = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{t-1} & S_t^\top \\ S_t & \Sigma_{tt} \end{bmatrix}, \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1^{t-1} \\ \mu_t \end{pmatrix}.$$

Mit Lemma A.2 (setze dazu $X_1 = p_1^{t-1}$ und $X_2 = p_t$) erhält man die bedingte Verteilung $Q^{(t)}(p_1^{t-1}, \cdot)$ der Zufallsvariablen p_t als Normalverteilung auf $\mathbb{R}^K$ mit bedingten Momenten $(\mu_{t|t-1}, \Sigma_t)$ die sich unter Verwendung der mit (3.50) definierten Parameter ergeben als:

$$\begin{aligned} \mu_{t|t-1} &:= \mu_t + S_t \left[\Sigma_1^{t-1}\right]^{-1} (p_1^{t-1} - \mu_1^{t-1}) \\ &= \beta_t - B_t p_1^{t-1} \\ \Sigma_t &:= \Sigma_{tt} - S_t \left[\Sigma_1^{t-1}\right]^{-1} S_t^\top. \end{aligned}$$

Die Behauptung (2) ist somit für beliebiges t beweisen.
Im letzten Faktorisierungsschritt erhält man die Randverteilung $Q^{(1)}$ der Zufallsvariablen p_1 als Normalverteilung auf $\mathbb{R}^K$ mit Momenten $(\mu_1, \Sigma_{11}) \in \mathbb{R}^K \times \mathcal{M}_K$ und damit die Behauptung (3).
Man beachte insbesondere, dass mit Lemma 3.3 in jedem Zerlegungsschritt sowohl die bedingte Verteilung als auch die sich ergebende Randverteilung nichtsingulär sind, d.h. die zugehörigen Varianz-Kovarianz-Matrizen sind positiv definit und symmetrisch. ■

A.6 Beweis von Lemma 3.7

Um die Lesbarkeit des folgenden Beweises zu erleichtern, sind an dieser Stelle nochmals die Parameterdefinitionen aufgeführt, die in der folgenden Beweisführung Verwendung finden. Es gilt mit (3.50) und (3.56) für $t = 1, \cdots, j-1$:

$$\begin{aligned}
A_t^{(n)} &:= \begin{cases} I_K & n = 0 \\ R^n I_K - R^{n-1} B_{t+n}^{(1)} - \ldots - B_{t+n}^{(n)} & n = 1, \cdots, j-t \end{cases} \\
\vartheta_t^{(n)} &:= A_t^{(n)-1} \mu_{t+n|t-1} \\
\Omega_t^{(n)} &:= A_t^{(n)-1} \Sigma_{t+n} A_t^{(n)-\top}, \qquad n = 0, 1, \cdots, j-t \\
c_t^{(n)} &:= \frac{c(\Omega_{t+n}^{(0)})}{c\left(\left[\sum_{i=0}^{j-(t+n)} \Omega_{t+n}^{(i)-1}\right]^{-1}\right)}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Weiter gilt darauf aufbauend für $t = 1, \cdots, j-1$:

$$\begin{aligned}
\Omega_t &:= \left[\sum_{n=1}^{j-t} \Omega_t^{(n)-1}\right]^{-1} \\
\vartheta_t &:= \Omega_t \left[\sum_{n=1}^{j-t} \Omega_t^{(n)-1} \vartheta_t^{(n)}\right] \\
c_t &:= \frac{\prod_{n=1}^{j-t} g(0; c_t^{(n)}, \vartheta_t^{(n)}, \Omega_t^{(n)})}{g(0; \vartheta_t, \Omega_t)}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\Theta_t &:= \left[\Sigma_t^{-1} + \Omega_t^{-1}\right]^{-1} \\
\theta_t &:= \Theta_t \left[\Sigma_t^{-1} \mu_{t|t-1} + \Omega_t^{-1} \vartheta_t\right] \\
\hat{c}_t &:= \frac{g(0; c_t, \vartheta_t, \Omega_t) g(0; c(\Sigma_t), \mu_{t|t-1}, \Sigma_t)}{g(0; \theta_t, \Theta_t)}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Für die folgende Beweisführung wird ein technischer Zusammenhang ausgenutzt, der in dem folgenden Lemma beschrieben wird:

Lemma A.3 *Gegeben die Parameter aus (A.5) und (A.6) gilt für* $t = 1, \cdots, j-1$*:*

$$g(p; c_t, \vartheta_t, \Omega_t) \quad = \quad \prod_{n=1}^{j-t} g(p; c_t^{(n)}, \vartheta_t^{(n)}, \Omega_t^{(n)})$$

Beweis: Setzt man $m = j - t$, $\vartheta^{(n)} = \vartheta_t^{(n)}$, $\Omega^{(n)} = \Omega_t^{(n)}$ sowie $c^{(n)} = c_t^{(n)}$ für $n = 1, \cdots, j-t$, so folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 3.1 (1). □

Um die eigentliche Behauptung zu zeigen, nutzt man zunächst Gleichung (3.76) und den Zusammenhang

$$g(Rp_t; \hat{c}_{t+1}, \theta_{t+1}, \Theta_{t+1}) \quad = \quad c(\Sigma_{t+1}) g(Rp_t; \mu_{t+1|t}, \Sigma_{t+1}) \; g(Rp_t; c_{t+1}, \vartheta_{t+1}, \Omega_{t+1})$$

aus. Somit gilt:

$$g(Rp_t; \frac{\hat{c}_{t+1}}{c(\Theta_{t+1})}, \theta_{t+1}, \Theta_{t+1}) \quad = \quad \underbrace{\frac{c(\Sigma_{t+1})}{c(\Theta_{t+1})} g(Rp_t; \mu_{t+1|t}, \Sigma_{t+1})}_{I} \underbrace{g(Rp_t; c_{t+1}, \vartheta_{t+1}, \Omega_{t+1})}_{II}. \tag{A.8}$$

Mit Lemma A.3 lässt sich der Ausdruck II in (A.8) schreiben als

$$\underbrace{g(Rp_t; c_{t+1}, \vartheta_{t+1}, \Omega_{t+1})}_{I} = \prod_{n=1}^{j-(t+1)} g(Rp_t; c_{t+1}^{(n)}, \vartheta_{t+1}^{(n)}, \Omega_{t+1}^{(n)}). \tag{A.9}$$

Mit Gleichung (A.5) und $A_{t+1}^{(0)} = I_K$ gilt: $\vartheta_{t+1}^{(0)} = A_{t+1}^{(0)-1} \mu_{t+1|t} = \mu_{t+1|t}$ und weiter $\Omega_{t+1}^{(0)} = A_{t+1}^{(0)-1} \Sigma_{t+1} A_{t+1}^{(0)-\top} = \Sigma_{t+1}$. Darauf aufbauend ergibt sich aus (A.5) unter Verwendung von Gleichung (3.77):

$$\begin{aligned} c_{t+1}^{(0)} \quad &= \quad \frac{c(\Omega_{t+1}^{(0)})}{c\left(\left[\sum_{i=0}^{j-(t+1)} \Omega_{t+1}^{(i)-1}\right]^{-1}\right)} \\ &= \quad \frac{c(\Sigma_{t+1})}{c\left(\left[\Sigma_{t+1}^{-1} + \sum_{i=1}^{j-(t+1)} \Omega_{t+1}^{(i)-1}\right]^{-1}\right)} \\ &= \quad \frac{c(\Sigma_{t+1})}{c\left(\left[\Sigma_{t+1}^{-1} + \Omega_{t+1}^{-1}\right]^{-1}\right)} = \frac{c(\Sigma_{t+1})}{c(\Theta_{t+1})}. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Der Ausdruck I in (A.8) kann somit geschrieben werden als:

$$\frac{c(\Sigma_{t+1})}{c(\Theta_{t+1})} g(Rp_t; \mu_{t+1|t}, \Sigma_{t+1}) \quad = \quad g(Rp_t; c_{t+1}^{(0)}, \vartheta_{t+1}^{(0)}, \Omega_{t+1}^{(0)}). \tag{A.11}$$

Einsetzen von (A.9) und (A.11) in (A.8) liefert:

$$g(Rp_t; \frac{\hat{c}_{t+1}}{c(\Theta_{t+1})}, \theta_{t+1}, \Theta_{t+1}) \quad = \quad \prod_{n=0}^{j-(t+1)} g(Rp_t; c_{t+1}^{(n)}, \vartheta_{t+1}^{(n)}, \Omega_{t+1}^{(n)}). \tag{A.12}$$

Aus der Definition der Matrizen $A_t^{(n)}$ sowie der Parameter $c_t^{(n)}$ in (A.5) ersieht man die rekursiven Zusammenhänge

$$A_t^{(n)} \quad = \quad RA_{t+1}^{(n-1)} - B_{t+n}^{(n)}, \quad n = 1, \cdots, j - t. \tag{A.13}$$

und

$$c_t^{(n)} \quad = \quad c_{t+1}^{(n-1)}, \quad n = 1, \cdots, j - t. \tag{A.14}$$

Durch Ausnutzung dieser Beziehung sowie der Eigenschaften (E1) und (E3) aus Lemma 3.1 kann (A.12) wie folgt umgeschrieben werden:[41]

$$\begin{aligned}
& g(Rp_t; \frac{\hat{c}_{t+1}}{c(\Theta_{t+1})}, \theta_{t+1}, \Theta_{t+1}) \\
= \quad & \prod_{n=0}^{j-(t+1)} g(Rp_t; c_{t+1}^{(n)}, \vartheta_{t+1}^{(n)}, \Omega_{t+1}^{(n)}) \\
\overset{(A.5)}{=} \quad & \prod_{n=0}^{j-(t+1)} g\left(Rp_t; c_{t+1}^{(n)}, A_{t+1}^{(n)-1} \mu_{t+n+1|t}, A_{t+1}^{(n)-1} \Sigma_{t+n+1} A_{t+1}^{(n)-\top}\right) \\
= \quad & \prod_{n=1}^{j-t} g\left(Rp_t; c_{t+1}^{(n-1)}, A_{t+1}^{(n-1)-1} \mu_{t+n|t}, A_{t+1}^{(n-1)-1} \Sigma_{t+n} A_{t+1}^{(n-1)-\top}\right)
\end{aligned}$$

[41] Die Ausnutzung der Eigenschaften (E1) und (E3) sowie obiger Gleichungen ist in den folgenden Umformungen durch entsprechende Superskripte kenntlich gemacht.

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{n=1}^{j-t} g\left(Rp_t; c_{t+1}^{(n-1)}, A_{t+1}^{(n-1)-1}\mu_{t+n|t}, A_{t+1}^{(n-1)-1}\Sigma_{t+n}A_{t+1}^{(n-1)-\top}\right)\\
&\overset{(E3)}{=} \prod_{n=1}^{j-t} g\left(RA_{t+1}^{(n-1)}p_t; c_{t+1}^{(n-1)}, \mu_{t+n|t}, \Sigma_{t+n}\right)\\
&\overset{(E1)}{=} \prod_{n=1}^{j-t} g\left(\left[RA_{t+1}^{(n-1)} - B_{t+n}^{(n)}\right] p_t; c_{t+1}^{(n-1)}, \mu_{t+n|t-1}, \Sigma_{t+n}\right)\\
&\overset{(A.13),(A.14)}{=} \prod_{n=1}^{j-t} g\left(A_t^{(n)}p_t; c_t^{(n)}, \mu_{t+n|t-1}, \Sigma_{t+n}\right)\\
&\overset{(E3)}{=} \prod_{n=1}^{j-t} g\left(p_t; c_t^{(n)}, A_t^{(n)-1}\mu_{t+n|t-1}, A_t^{(n)-1}\Sigma_{t+n}A_t^{(n)-\top}\right)\\
&\overset{(A.5)}{=} \prod_{n=1}^{j-t} g\left(p_t; c_t^{(n)}, \nu_t^{(n)}, \Omega_t^{(n)}\right)\\
&= g(p_t; c_t, \vartheta_t, \Omega_t)
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt erneut Lemma A.3 ausgenutzt wurde. Damit ist (3.80) bewiesen. ■

Name: Hillebrand

Vorname: Marten

Versicherung

Ich versichere, dass ich die Diplomarbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als den angegebenen Quellen angefertigt habe.
Die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen habe ich als solche kenntlich gemacht.

Bielefeld, den 6. August 2003

....